

**Asymptotische Behandlung von Eigenwertproblemen
mit Variationsmethoden
und eine Anwendung auf finite Elemente**

Norbert Spangler

1980

Asymptotische Behandlung von Eigenwertproblemen
mit Variationsmethoden
und eine Anwendung auf finite Elemente

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Norbert Spangler

aus Neumarkt i. d. Opf.

eingereicht am 29.5.1980



1. Berichterstatter : Prof. Dr. G. Hämmerlin

2. Berichterstatter : Prof. Dr. E. Wienholtz

Tag der mündlichen Prüfung : 13. 11. 1980

Inhalt

0. Einleitung	1
0.1 Problemstellung	1
0.2 Zusammenfassung der folgenden Kapitel	4
1. Asymptotische Fehlerentwicklungen bei linearen Eigenwertaufgaben	7
1.1 Problemstellung	8
1.2 Existenzsatz für Fehlerentwicklungen	11
2. Verallgemeinerte Euler-MacLaurin Entwicklungen	20
2.1 Eindimensionale Entwicklungen	20
2.2 Zweidimensionale Trapezregeln	28
2.3 Zweidimensionale Summenformeln	31
3. Asymptotische Entwicklungen von Bilinearformen	44
3.1 Darstellung von Bilinearformen durch Trapezsummen	44
3.2 Lokale Entwicklung der induzierten Abbildung ..	47
3.3 Entwicklung symmetrischer Bilinearformen	49
3.4 Bilinearformen mit Gitterfunktionen	64
3.5 Bilinearformen in der Methode der finiten Elemente	68
4. Anwendungen bei elliptischen Eigenwertaufgaben	74
4.1 Problemstellung und Diskretisierung	74
4.2 Ganzzahlige Entwicklungen	75
4.3 Beispiele für ganzzahlige Entwicklungen	84
4.4 Nichtganzzahlige Entwicklungen	87
4.5 Gleichungen für die Koeffizienten der Entwicklung	99
4.6 Lösung inhomogener Eigenwertaufgaben mit nichtintegrierbarer rechter Seite	106
4.7 Lösung diskreter Gleichungen	114
4.8 Beispiele für nichtganzzahlige Entwicklungen ..	123
4.9 Numerische Beispiele	135
Anhang	147
Literatur	150

Bezeichnungen

(i,j,k)	k-te Formel/Aussage im j-ten Abschnitt des i-ten Kapitels
$\mathbb{N}$	$1,2,3,4,5,\dots$
$\mathbb{N}_0$	$0,1,2,3,4,\dots$
O, o	Landausche Symbole
δ_{xy}	Kroneckersymbol
χ_M	charakteristische Funktion einer Menge M $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$, $\chi_M(x) = 0$ für $x \notin M$
$[x]$	$\max\{z \mid z \in \mathbb{Z}, z \leq x\}$
nM	$\{nX \mid X \in M\}$ für eine Menge M
$\sum_{i=a}^b X_i$	$\sum_{i=a}^b X_i - \frac{1}{2}X_b$ ($\sum'' = \lim_{b \rightarrow \infty} \sum''$)
$\sum_{i=a}^b X_i$	$\sum_{i=a}^b X_i - \frac{1}{2}X_a - \frac{1}{2}X_b$
$\bar{B}_j(t), \overline{\bar{B}}_j(t)$	periodische Bernoullipolynome (siehe (2.1.2+3))
$J_\nu(t)$	Besselfunktion der Ordnung ν
$Y_\nu(t)$	Neumannsche Funktion der Ordnung ν
$\zeta(t)$	Riemannsche Zetafunktion
$\overset{\circ}{\Omega}, \bar{\Omega}, \partial\Omega$	offener Kern, Abschluß, Rand eines Gebiets Ω
Ω_n	Gitterpunkte in Ω (siehe (3.1.1))
$Q_i^{(n)}$	Gitterpunkt (siehe (3.1.1))
T_0	Standarddreieck $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
U_0	polygonale Umgebung des Nullpunkts (siehe (3.1.1))
K_α	Kegel im $\mathbb{R}^2$ (siehe (3.1.1))
$K_{\alpha,d}$	Gitterpunkte in K_α (siehe (3.3.30))
$\mathfrak{T}$	Triangulierung eines Gebiets
ψ_ν	affine Transformation: $T_0 \rightarrow T_\nu \in \mathfrak{T}$ mit Funktionalmatrix $D\psi_\nu$ (siehe (2.2.5))

$C_p(\bar{\Omega})$	Raum der in $\bar{\Omega}$ p-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen sich stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortsetzen lassen
$C_0^\infty(\Omega)$	Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω
D, D_n	spezielle Funktionenräume (siehe (3.1.2))
L_1^0	Hilbertraum von Gitterfunktionen (siehe (4.7.5))
$[,]_A$	Skalarprodukt in L_1^0 (siehe (4.7.2))
$[,]$	Skalarprodukt für Gitterfunktionen (siehe (3.3.34))
Δ	Laplaceoperator
h_n^*	induzierte Abbildung einer Bilinearform (siehe (3.1.5))
$\mathfrak{P}_i(u)$	Anteil einer Entwicklung der Funktion u (siehe (3.3.5))
r_n	Interpolierende in D_n (siehe (1.1.5), (3.1.4), (3.4.1))
$Q_{n,\Omega}$	Trapezregel (siehe (2.2.1), (2.2.6))
$i(\alpha)$	Integrationsgrenze (siehe (2.1.9))
$\sigma_h, \mathfrak{z}_h, V_h$	charakteristische Größen einer Bilinearform (siehe (3.2.2-4))
(r, θ)	Polarkoordinaten eines Punkts (x, y)
$w \log r^\alpha$	Funktion mit den Werten $w(r, \theta)(\log r)^\alpha$
$C(u, v)$	von u und v abhängige Konstante
$F1, F2$	Hinweis auf Formeln (siehe Anhang)



Digitized by the Internet Archive
in 2026

O. Einleitung

O.1 Problemstellung

Eine große Klasse numerischer Verfahren besitzt die Eigenschaft, daß für eine berechnete Folge von Näherungen einer gesuchten Größe T_0 eine Darstellung der Form

$$(O.1.1) \quad T_n = T_0 + t_1 \left(\frac{1}{n}\right)^{\sigma_1} + t_2 \left(\frac{1}{n}\right)^{\sigma_2} + \dots + t_{p-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\sigma_{p-1}} + R_{pn}$$

gilt mit $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{p-1} < \sigma_p$, $R_{pn} = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\sigma_p}\right)$ und $t_1, \dots, t_{p-1}$ unabhängig von n . T_n besitzt also eine Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ für $n \rightarrow \infty$. Unter der Voraussetzung der Existenz von (O.1.1) läßt sich nun mit Hilfe eines Extrapolationsalgorithmus der Fehler $T_n - T_0$ verkleinern. Dabei ist es nicht notwendig, die Koeffizienten t_i zu berechnen.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, Entwicklungen des Typs (O.1.1) mit möglicherweise nichtganzzahligen Potenzen von $\frac{1}{n}$ bei linearen Eigenwertaufgaben nachzuweisen. Eine große Rolle spielt hierbei das Auftreten von Singularitäten in den Ableitungen der Eigenlösungen.

Bekanntestes Beispiel für (O.0.1) ist wohl die Euler-MacLaurin Entwicklung, die bei der Integration einer $2p$ -mal stetig differenzierbaren Funktion f mit der Sehnentrapezregel entsteht. Die auftretenden Potenzen σ_j sind dann gerade ($=2j$). Ähnliche Ergebnisse ergeben sich bei der numerischen Lösung von Integral- und Differentialgleichungen, unter der Voraussetzung, daß die Lösungen hinreichend glatt sind. Eine Übersicht hierzu findet man bei Joyce [1971].

Betrachtet man dagegen beispielsweise die Eigenwertaufgabe in einem L-förmigen Gebiet

$$(0.1.2) \quad \begin{aligned} -\Delta u - \lambda u &= 0 && \text{in } L \\ u &= 0 && \text{auf } \partial L, \end{aligned}$$

so ist diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt. Typisch für ein solches Problem sind durch die Geometrie des Gebiets bedingte Singularitäten der Lösung (genauer der Ableitungen) in der einspringenden Ecke. So besitzt eine Eigenfunktion des L-Gebiets dort eine Entwicklung nach Besselfunktionen (in Polarkoordinaten) (Lehmann [1959])

$$(0.1.3) \quad u(r, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j J_{2j/3}(\sqrt{\lambda} r) \sin \frac{2}{3} j \theta.$$

Dieses Verhalten kann nun in verschiedener Weise für numerische Verfahren ausgenutzt werden. Fox/Henrici/Moler [1967] und Donelly [1969] approximieren u durch eine geeignete Linearkombination der Funktionen $J_{\nu}(r) \sin \nu \theta$. Dann lassen sich durch durch Hinzunahme von "singulären" Ansatzfunktionen in der Methode der Finiten Elemente die Approximationseigenschaften der verwendeten Teilräume verbessern, so daß quasioptimale Konvergenz erreicht wird (Fix [1969], Fix/Gulati/Wakoff [1973]).

Die Entwicklung (0.1.3) und zahlreiche numerische Berechnungen gaben andererseits auch zu der Vermutung Anlaß, daß die Näherung λ_n von Ritz- bzw. Differenzenverfahren für den kleinsten Eigenwert λ eine Darstellung wie in (0.1.1) besitzt

$$(0.1.4) \quad \lambda_n = \lambda + a\left(\frac{1}{n}\right)^{4/3} + b\left(\frac{1}{n}\right)^2 \log \frac{1}{n} + c\left(\frac{1}{n}\right)^2 + d\left(\frac{1}{n}\right)^{8/3} + \dots$$

(Forsythe [1954], Forsythe/Wasow [1960] 24.7). Ähnliches wurde auch beim Doppel-T Gebiet vermutet (Donelly [1969]).

Auf Grund fehlender Differenzierbarkeitseigenschaften lassen sich aber die bekannten Verfahren von Stetter [1965, 1973/1.3], Bulirsch [1966] oder Grigorief [1979c] zum Nachweis von Fehlerentwicklungen (nach ganzen Potenzen!) nicht mehr direkt anwenden.

Erfolgversprechender wäre in diesem Zusammenhang die Idee von Hofmann [1967] bei der numerischen Lösung des Dirichlet- und Neumannproblems in Rechteckgebieten. Der Laplaceoperator wird dort durch den üblichen 5-Punkte Differenzenoperator approximiert, dessen Inverse (diskrete Greensche Funktion) in diesem Fall explizit angegeben werden kann. Damit läßt sich der Diskretisierungsfehler als Quadraturfehler der Sehnentrapezregel darstellen, deren asymptotisches Verhalten bekannt ist. Da aber die Beweise auf der Kenntnis des Lösungsoperators beruhen, bleibt diese Technik auf die entsprechenden Spezialfälle beschränkt und kann nicht auf allgemeinere Probleme (andere Gebiete) übertragen werden.

Bemerkenswert ist jedoch das Prinzip, den Diskretisierungsfehler als Quadraturfehler darzustellen. Dabei wird von einer Verallgemeinerung der Euler-MacLaurin Entwicklung für Funktionen mit integrierbaren Singularitäten Gebrauch gemacht. Da auch wir derartige Entwicklungen ausnützen wollen, soll hier eine kurze Übersicht der wesentlichen Ergebnisse zu diesem Problem gegeben werden.

Für Funktionen $f(x) = x^{-s}g(x)$, $0 < s < 1$ und g hinreichend oft differenzierbar, zeigt Navot [1961], daß neben den üblichen quadratischen Anteilen in der Fehlerentwicklung auch Terme der Form n^{s-j} auftreten. In einer darauf folgenden Arbeit werden für logarithmische Singularitäten der Form $f(x) = g(x)\log x$ Terme $n^{-j}\log n$ nachgewiesen ([1962]). Diese wurden hier der Einfachheit halber in (0.1.1) nicht berücksichtigt.

Waterman/Yos/Abodeely [1964] verallgemeinern die Euler-MacLaurin Entwicklung für Integranden $f(x) = s(x)g(x)$, g analytisch in $[0,1]$ und s analytisch in $(0,1]$ mit einer möglichen integrierbaren Singularität bei 0. Mittels Laplacetransformationen werden Ergebnisse hergeleitet, die im Fall $s(x) = x^{-s}$ die Aussagen von Navot bestätigen und für $s(x) = x^{-1/2}e^{-1/x}$ die Existenz von Termen der Form $n^{-1/2}e^{-\sqrt{4\pi n}}\cos(\pi/4 + \sqrt{4\pi n})$ zeigen. Letztere lassen sich nicht durch die üblichen Extrapolationsalgorithmen eliminieren.

Besitzt eine Funktion algebraische oder logarithmische Singularitäten an beiden Intervallenden , so treten in der Entwicklung alle Terme auf , die auch bei Integranden mit nur einer singulären Stelle erscheinen würden (Lyness/Ninham [1967]). Die Formeln behalten sogar ihre Gültigkeit , wenn nichtintegrierbare Singularitäten vorliegen (Ninham [1966]).

Alle diese Untersuchungen bezogen sich auf Funktionen einer Variablen. Mehrdimensionale Betrachtungen zu ganzzahligen Entwicklungen finden sich bei Laurant [1964] und Baker/Hodgson [1971] (Produktformeln im Einheitsquadrat), Lyness/McHugh [1970] (N-dimensionaler Hyperwürfel) sowie Lyness/Puri [1973] (N-dimensionaler Simplex).

Für Funktionen , die in den Ecken des Gebiets integrierbare Singularitäten besitzen , also u.a. die Lösungen von (0.1.2) , finden sich die dazugehörigen Entwicklungen bei Lyness [1976b] (N-dimensionaler Hyperwürfel) und Lyness/Monegato [1980] (N-dimensionaler Simplex). Zu erwähnen wäre noch der Spezialfall $f(x,y) = g(x,y)(x-y)^{-1}$ im Einheitsquadrat , der von Monegato/Lyness [1979] betrachtet wird.

0.2 Zusammenfassung der folgenden Kapitel

Im ersten Kapitel entwickeln wir einen Existenzsatz für Fehlerdarstellungen bei Eigenwertaufgaben. Dazu formulieren wir sowohl das Problem als auch das Diskretisierungsverfahren als Variationsaufgabe. Dabei wird von den diskreten Bilinearformen eine Entwicklung gefordert , die den lokalen Operatorentwicklungen von Stetter [1965] bzw. Bulirsch [1966] entspricht .Dadurch ist es möglich , auf die üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu verzichten. Beim Beweis werden dann die wesentlichen Prinzipien von Stetter und Bulirsch übernommen.

Die Herleitung der erwähnten Bilinearformentwicklungen ist das Ziel der beiden nächsten Kapitel.

Zunächst werden Verallgemeinerungen der Euler-MacLaurin Entwicklung nachgewiesen. Diese gelten für Funktionen mit algebraischen

und logarithmischen Singularitäten , sowie für zweidimensionale polygonale Gebiete. Auch auf die Forderung nach der Integrierbarkeit der Funktion kann verzichtet werden.

Mit Hilfe dieser Formeln wird dann im dritten Kapitel das asymptotische Verhalten von Bilinearformen bestimmt. Die Untersuchungen orientieren sich zwar an den späteren Anwendungsmöglichkeiten in der Methode der finiten Elemente , sind aber dennoch so allgemein formuliert , daß sie sich leicht auf andere Probleme übertragen lassen. Zusätzlich werden Aussagen über Funktionen hergeleitet , die auf unendlichen Punktegittern im $\mathbb{R}^2$ definiert sind. Über alle diese Ergebnisse fanden sich bisher in der Literatur keine Hinweise. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden dann einige Beispiele aus der Methode der finiten Elemente angegeben , wobei stückweise lineare Ansatzfunktionen zu speziellen Triangulierungen des Gebiets gewählt wurden.

Im vierten Kapitel wird schließlich der Entwicklungssatz (1.2.1) auf die Eigenwertaufgabe für den Laplaceoperator in beschränkten polygonalen Gebieten angewandt. Nach einer kurzen Betrachtung zu ganzzahligen Entwicklungen konzentrieren wir uns in erster Linie auf den Fall von Eigenfunktionen , deren Ableitungen Singularitäten in den Ecken des Gebiets besitzen (L-Gebiet). Das größte Problem stellt in diesem Zusammenhang das Aufstellen und Lösen der Gleichungssysteme für die Koeffizienten der Entwicklung dar. Durch einen speziellen Ansatz , bei dem sowohl Funktionen mit nichtintegrierbaren algebraischen und logarithmischen Singularitäten , als auch Gitterfunktionen zugelassen werden , ist es möglich , die Gleichungen in eine kanonische Form zu bringen. Es sind dies inhomogene elliptische Eigenwertaufgaben mit nichtintegrierbarer rechter Seite und Differenzengleichungen in ebenen Punktegittern.

Zum ersten dieser Probleme geben wir im Abschnitt 4.6 ein Verfahren zur Konstruktion und Darstellung von Lösungen an. Die zweite Aufgabe steht im Zusammenhang mit der Existenz einer diskreten Greenschen Funktion bzw. der Invertierung einer speziellen unendlichen Matrix , deren Zeilen und Spalten finit sind. Dazu wird ein geeigneter Raum angegeben , in dem Existenz , Eindeutigkeit und Lösungsdarstellungen nachgewiesen werden können.

Die Untersuchungen in diesem siebten Abschnitt werden mit funktionalanalytischen Methoden durchgeführt. Im Anhang geben eine zu diesem Differenzenoperator gehörende Singularitätenfunktion an , sowie einige spezielle Greensche Funktionen.

Im achten Abschnitt wird dann die Vorgehensweise am Beispiel der kleinsten Eigenwerte des Laplaceoperators zum L-Gebiet demonstriert. Es zeigt sich , daß die vermutete Entwicklung (0.1.4) durch theoretische Herleitungen bestätigt werden kann.

Im Abschnitt 4.9 wird dies dann durch numerische Berechnungen überprüft.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für die Anregung und das stete Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Mathematischen Instituts für die zahlreichen , anregenden Diskussionen , besonders Herrn Dr. E. Schäfer und Herrn Dr. P. Jochum.

Bei Herrn Dipl. Math. G. Hergesell bedanke ich mich für die Benützung der Graphik-Programme.

1. Asymptotische Fehlerentwicklungen bei linearen Eigenwertaufgaben

Bei der näherungsweise Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen in Banachräumen lassen sich unter Voraussetzungen wie Konvergenz, Stabilität und einer "lokalen Entwicklung" des diskreten Operators asymptotische Fehlerentwicklungen nachweisen (Stetter [1965] , [1973] Kap. 1.3). Diese lokale Entwicklung , die auch von Bulirsch [1966] und Grigorieff [1975c] bei der Betrachtung linearer Eigenwertaufgaben gefordert wird , existiert in der Regel , wenn die Funktionen in den entsprechenden Banachräumen (insbesondere die Lösung) hinreichend oft differenzierbar sind. Eine derartige Voraussetzung ist zum Beispiel bei den Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung für eine L-förmige Membran nicht erfüllt , so daß diese Sätze nicht mehr angewandt werden können.

Ein anderer Weg wird von Hofmann [1966] vorgeschlagen. Ausgehend von einer expliziten Darstellung des diskreten Lösungsoperators (diskrete Greensche Funktion) wird das asymptotische Verhalten des Fehlers durch ein entsprechendes Verhalten des Quadraturfehlers beschrieben , der bei der Integration spezieller Funktionen mit der Sehnentrapezregel entsteht. Dieses Fehlerverhalten ist u.a. in den Arbeiten von Navot [1961],[1962] genau beschrieben worden. Da sich der diskrete Lösungsoperator jedoch nur in sehr speziellen Fällen explizit angeben läßt , ist dieses Verfahren nur begrenzt anwendbar.

Wir wollen hier eine Kombination der beiden Verfahren betrachten. Dazu formulieren wir die Eigenwertaufgabe als lineare Variationsaufgabe. Die diskreten Bilinearformen lassen sich unter geeigneten Voraussetzungen durch Quadraturformeln beschreiben , so daß sich ihr asymptotisches Verhalten ohne Kenntnis des Lösungsoperators angeben läßt. Hierauf wenden wir die Beweistechnik von Stetter bzw. Bulirsch an und erhalten einen Existenzsatz für Fehlerentwicklungen , bei dem die üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nicht erfüllt werden müssen.

1.1 Problemstellung

Sei E ein reeller Prä-Hilbertraum mit Skalarprodukt $b(,)$ und Norm $\| \cdot \|$, sowie

$$a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform.

Vorgelegt sei die Eigenwertaufgabe :

(1.1.1) Bestimme $(u, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\varphi \in E} \quad & a(u, \varphi) = \lambda b(u, \varphi) \\ & b(u, u) = 1 \end{aligned}$$

Wir wollen uns in dieser Arbeit auf einfache Eigenwerte beschränken, d.h. wir betrachten nur Lösungen (u, λ) , bei denen u bis auf das Vorzeichen eindeutig ist.

Eine Folge von Näherungen $(u_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werde durch Lösen einer Folge von diskreten Eigenwertaufgaben

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} \bigwedge_{\varphi_n \in D_n} \quad & a_n(u_n, \varphi_n) = \lambda_n b_n(u_n, \varphi_n) \\ & b_n(u_n, u_n) = 1 \end{aligned}$$

bestimmt. Dabei ist

$$(1.1.3) \quad D_n = \text{span}(b_1^{(n)}, \dots, b_{N_n}^{(n)}) \quad , \quad \dim D_n = N_n$$

ein endlichdimensionaler Prä-Hilbertraum mit Skalarprodukt $b_n(,)$ und Norm $\| \cdot \|_n$,

$$(1.1.4) \quad a_n : D_n \times D_n \rightarrow \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform.

Es sollen auch hier nur einfache Eigenwerte betrachtet werden.

Es sei weiterhin $\overline{E}$ ein linearer Raum mit $E \subset \overline{E}$ und

$$(1.1.5) \quad r_n : \overline{E} \rightarrow D_n \text{ linear ("Restriktion")}$$

$$\rho_n : D_n \rightarrow \overline{E} \text{ linear ("Einbettung")}$$

mit der Eigenschaft :

$$\bigwedge_{\varphi_n \in D_n} r_n \rho_n \varphi_n = \varphi_n .$$

Bei der Betrachtung des globalen Diskretisierungsfehlers

$$(\epsilon_n, \mu_n) \in D_n \times \mathbb{R}$$

$$(1.1.6) \quad \epsilon_n := u_n - r_n u$$

$$\mu_n := \lambda_n - \lambda$$

interessiert , unter welchen Voraussetzungen dieser Fehler eine Darstellung der Form

$$(1.1.7) \quad \epsilon_n = \sum_{j \in J} \sigma_j(n) r_n u_j + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right)$$

$$\mu_n = \sum_{j \in J} \sigma_j(n) \mu_j + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right)$$

mit Elementen $u_j \in \overline{E}$ besitzt (d.h. u_j nicht notwendig in E).

Die Funktionen $\sigma_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sollen dabei die Eigenschaft

$$(1.1.8) \quad \bigwedge_{j \in J} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_j(n) = 0$$

besitzen. Diese Funktionen beschreiben also das asymptotische Verhalten des Fehlers für $n \rightarrow \infty$. Beispiele sind

$$(1.1.9) \quad \sigma_j(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{2j} \quad \text{falls } J \subset \mathbb{N}_0$$

$$(1.1.10) \quad \sigma_j(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha j_1} (\log \frac{1}{n})^{j_2} \quad \text{falls } j = (j_1, j_2), J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \alpha > 0 .$$

Im folgenden werden diese Funktionen und damit verbundene Indextmengen genauer beschrieben.

Es sei $(I, +)$ eine kommutative Halbgruppe mit 0. Für $i \in I$ seien monotone Funktionen $\sigma_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, derart daß

$$(1.1.11) \quad i = j + k \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sigma_i(n) = \sigma_j(n) \sigma_k(n) .$$

Von den Funktionen wird weiterhin folgende Eigenschaft vorausgesetzt :

$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \sigma_i(n) \in \{0, 1, \infty\}$$

Damit lassen sich dann folgende Teilmengen von I definieren :

$$(1.1.12) \quad I_0 := \{ i \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_i(n) \in \{0, 1\} \}$$

$$I_p := \{ i \in I \mid \forall_{\alpha < p} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \sigma_i(n) = \infty \} \quad \text{für } p \in \mathbb{N}$$

$$I_{jp} := \{ i \in I \mid i + j \in I_p \} \quad \text{für } j \in I \text{ und } p \in \mathbb{N}$$

und es gilt :

$$(1.1.13) \quad \bigwedge_{i \in I \setminus I_p} \bigwedge_{\epsilon > 0} \sigma_i(n) = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right)$$

$$\bigwedge_{i \in I \setminus I_{jp}} \bigwedge_{\epsilon > 0} \sigma_i(n) \sigma_j(n) = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right) .$$

Bezeichnet man die Lösung (u, λ) von (1.1.1) mit (u_0, λ_0) ($0 \in I$), so läßt sich die Darstellung (1.1.7) des globalen Diskretisierungsfehlers in der Form

$$(1.1.14) \quad u_n = \sum_{j \in J} \sigma_j(n) r_n u_j + u_{pn}$$

$$\lambda_n = \sum_{j \in J} \sigma_j(n) \lambda_j + \lambda_{pn}$$

schreiben mit $J = I_0 \cap I_p$, $0 \in J$ und für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt :

$$\|u_{pn}\|_n = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right), \quad |\lambda_{pn}| = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right) .$$

1.2 Existenzsatz für Fehlerentwicklungen

Bevor wir den Existenzsatz für die Entwicklung (1.1.14) formulieren, soll kurz skizziert werden, wie sich die hinreichenden Bedingungen herleiten lassen. Man geht von einer Darstellung der Form (1.1.14) aus mit zunächst freien Koeffizienten u_i und λ_i , setzt diese in die diskrete Gleichung (1.1.2) ein und wählt eine Testfunktion $\varphi_n = r_n \varphi$ mit $\varphi \in \overline{E}$. Fordert man die Existenz einer Bilinearform-entwicklung

$$a_n(r_n u_i, r_n \varphi) = \sum \sigma_j(n) a_j(u_i, \varphi) + \text{Rest}$$

(analog für b_n) und sortiert nach den Funktionen $\sigma_i(n)$, so ergibt sich (unter Benützung der Addition in I)

$$0 = \sum \sigma_i(n) [\text{Terme unabhängig von } n] + \text{Rest}.$$

Die Terme in den eckigen Klammern, sowie der Rest werden 0 gesetzt und man erhält so, zusammen mit einer analogen Umformung der Normierungsbedingung $1 = b_n(u_n, u_n)$ Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Entwicklung. Unter der Annahme der Konvergenz des Verfahrens läßt sich dann mit einer Stabilitätsbedingung die Beschränktheit der Restglieder von (1.1.14) zeigen. Wir wollen hier nicht weiter auf die Frage nach der Konvergenz des Verfahrens eingehen und verweisen hierzu auf die Literatur (etwa Grigorieff [1975 a,b], Stummel [1977], Vainikko [1977]).

(1.2.1) Satz :

Es seien (u_0, λ_0) , (u_n, λ_n) Lösungen von (1.1.1) bzw. (1.1.2) und J eine endliche Teilmenge von $I_0 \cap I_p$ mit $0 \in J$. Für $j \in J$ seien $E_j \subset \overline{E}$ lineare Teilräume mit $E_i \subset E_j$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_j(n) \sigma_i(n)^{-1} = 0$ und $\rho_n(D_n) \subset E_0$. Die Diskretisierung erfülle folgende Voraussetzungen :

(1.2.2) Konvergenz des Verfahrens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - r_n u_0\|_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - \lambda| = 0$$

(1.2.3) Entwicklung der diskreten Bilinearformen

Es existieren symmetrische Bilinearformen

$$a_i, b_i, a_{in}, b_{in} : E_k \times E_l \rightarrow \mathbb{R}$$

für $i \in I$, $k, l \in J$ mit $k+l \in I_p$ so daß gilt :

$$\bigwedge_{n_1 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_1} \bigwedge_{k, l \in J} (v, w) \in E_k \times E_l \quad k+l \in I_p$$

$$a_n(r_n v, r_n w) = \sum_{j \in I_{k+l, p}} \sigma_j(n) a_j(v, w) + a_{k+l, n}(v, w)$$

$$b_n(r_n v, r_n w) = \sum_{j \in I_{k+l, p}} \sigma_j(n) b_j(v, w) + b_{k+l, n}(v, w)$$

Dabei sind die Bilinearformen a_j und b_j nur für endlich viele Indizes $j \in I_{k+l, p}$ verschieden von 0.

Die Restglieder genügen einer Abschätzung

$$|\sigma_i(n) a_{in}(v, w)| \leq C_i^I(v, w) \left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}$$

$$|\sigma_i(n) b_{in}(v, w)| \leq C_i^{II}(v, w) \left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}$$

mit C_i^I, C_i^{II} unabhängig von n und beliebigem $\epsilon > 0$.

(1.2.4) Es existieren $(u_j, \lambda_j) \in E_j \times \mathbb{R}$, $j \in J \setminus \{0\}$ so daß

$$\bigwedge_{l \in I_p} \bigwedge_{\varphi \in E_0} \sum_{\substack{j \in J \\ i+j=1}} \sum_{i \in I_{j,p}} a_i(u_j, \varphi) - \sum_{\substack{k, j \in J \\ i+j+k=1}} \sum_{i \in I_{j,p}} \lambda_k b_i(u_j, \varphi) = 0$$

$$\bigwedge_{l \in I_p} \sum_{\substack{k, j \in J \\ i+j+k=1}} \sum_{i \in I_{k+j, p}} b_i(u_k, u_j) = \delta_{l0}$$

(1.2.5) Stabilitätsbedingung

$$C > 0 \quad \bigvee_{n_2 \in \mathbb{N}} \quad \bigwedge_{n \geq n_2} \quad \bigwedge_{h_n: D_n \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}} :$$

Die Aufgabe

$$\bigwedge_{\varphi_n \in D_n} \quad a_n(w_n, \varphi_n) - \lambda_n b_n(w_n, \varphi_n) = h_n(\varphi_n)$$

besitzt im Fall $h_n(u_n) = 0$ genau eine Lösung $w_n \in D_n$ mit $b_n(w_n, u_n) = 0$ und es gilt

$$\|w_n\|_n \leq C \|h_n\|_n$$

Dabei ist $\|h_n\|_n$ die induzierte Operatornorm.

Es sei weiterhin für $\varphi \in E_0$ mit den Lösungen (u_i, λ_i) aus (1.2.4)

$$\begin{aligned} \tau_n(\varphi) := & - \sum_{\substack{k, j \in J \\ i+j+k \in I \setminus I_p}} \sum_{i \in I_{jp}} \sigma_j(n) \sigma_k(n) \sigma_i(n) \lambda_k b_i(u_j, \varphi) \\ & + \sum_{j \in J} \sigma_j(n) [a_{jn}(u_j, \varphi) - \lambda_n b_{jn}(u_j, \varphi)] \end{aligned}$$

$$\theta_n(\varphi) := \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_{jp}} \sigma_i(n) \sigma_j(n) b_i(u_j, \varphi)$$

und

$$(1.2.6) \quad \|\tau_n \circ_n\|_n = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0 \text{ beliebig}$$

$$(1.2.7) \quad \|\theta_n \circ_n\|_n = O(1)$$

$$(1.2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \circ_n u_n = \theta \neq 0$$

$$(1.2.9) \quad \bigwedge_{j \in J \setminus \{0\}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_j(n)| \|r_n u_j\|_n = 0$$

Dann gilt :

$\bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} (u_n, \lambda_n)$ besitzt eine Darstellung der Form (1.1.14)

Bemerkung :

Der Zusammenhang zwischen den Aufgaben (1.1.1) und (1.1.2) ist hier nur durch die Forderung nach der Konvergenz (1.2.2) gegeben. Eine in diesem Sinne zweckmäßige , für den Beweis jedoch nicht notwendige Voraussetzung wäre eine Konsistenzbedingung der Form :

$$(1.2.10) \quad a_0|_{E \times E} \equiv a, \quad b_0|_{E \times E} \equiv b.$$

Sie ist in der Regel erfüllt. Verzichtet man jedoch hierauf und auf die Forderung $E \subset E_0$, so läßt sich der Satz auch wie folgt interpretieren :

Unter den Voraussetzungen (1.2.2-9) besitzt die Folge der Lösungen (u_n, λ_n) der diskreten Aufgabe eine Darstellung der Form (1.1.14).

Dabei ist es nicht notwendig , daß (u_0, λ_0) Lösung der Aufgabe

$$\bigwedge_{\varphi \in E_0} \quad a_0(u_0, \varphi) - \lambda_0 b_0(u_0, \varphi) = 0$$

$$b_0(u_0, u_0) = 1$$

ist.

Beweis des Satzes :

Wir definieren

$$u_{pn} := u_n - \sum_{j \in J} \sigma_j(n) r_n u_j$$

$$\lambda_{pn} := \lambda_n - \sum_{j \in J} \sigma_j(n) \lambda_j$$

mit den Lösungen (u_i, λ_i) von (1.2.4) . Es ist also zu zeigen , daß u_{pn} und λ_{pn} ein Verhalten wie in (1.1.14) für hinreichend großes n besitzen.

Mit diesen Bezeichnungen setzen wir (u_n, λ_n) in die diskrete Gleichung (1.1.2) ein und erhalten für beliebiges $\varphi_n \in D_n$ wegen $\rho_n \varphi_n \in E_0$ und $r_n \rho_n \varphi_n = \varphi_n$ mit (1.2.3) :

$$\begin{aligned}
 (1.2.11) \quad 0 &= a_n(u_n, \varphi_n) - \lambda_n b_n(u_n, \varphi_n) \\
 &= \sum_{j \in J} \sigma_j(n) [a_n(r_n u_j, r_n \rho_n \varphi_n) - \lambda_n b_n(r_n u_j, r_n \rho_n \varphi_n)] \\
 &\quad + a_n(u_{pn}, \varphi_n) - \lambda_n b_n(u_{pn}, \varphi_n) \\
 &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_{jp}} \sigma_i(n) \sigma_j(n) [a_i(u_j, \rho_n \varphi_n) - \lambda_n b_i(u_j, \rho_n \varphi_n)] \\
 &\quad + \sum_{j \in J} \sigma_j(n) [a_{jn}(u_j, \rho_n \varphi_n) - \lambda_n b_{jn}(u_j, \rho_n \varphi_n)] \\
 &\quad + a_n(u_{pn}, \varphi_n) - \lambda_n b_n(u_{pn}, \varphi_n) \\
 &= \sum_{l \in I_p} \sigma_l(n) [\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_{jp}} a_i(u_j, \rho_n \varphi_n) - \sum_{j, k \in J} \sum_{i \in I_{jp}} \lambda_k b_i(u_j, \rho_n \varphi_n)] \\
 &\quad + \tau_n \rho_n(\varphi_n) - \lambda_{pn} \theta_n \rho_n(\varphi_n) + a_n(u_{pn}, \varphi_n) - \lambda_n b_n(u_{pn}, \varphi_n).
 \end{aligned}$$

Wegen (1.2.4) verschwindet der Ausdruck in den eckigen Klammern und man erhält :

$$(1.2.12) \quad \bigwedge_{\varphi_n \in D_n} a_n(u_{pn}, \varphi_n) - \lambda_n b_n(u_{pn}, \varphi_n) = \lambda_{pn} \theta_n \rho_n(\varphi_n) - \tau_n \rho_n(\varphi_n)$$

Aus der Normierungsvorschrift $b_n(u_n, u_n) = 1$ ergibt sich analog :

$$\begin{aligned}
 1 &= b_n(u_n, u_n) \\
 &= b_n(u_n - u_{pn}, u_n - u_{pn}) + 2b_n(u_{pn}, u_n) - b_n(u_{pn}, u_{pn}) \\
 &= \sum_{i, j \in J} \sigma_i(n) \sigma_j(n) b_n(r_n u_i, r_n u_j) + 2b_n(u_{pn}, u_n) - b_n(u_{pn}, u_{pn})
 \end{aligned}$$

Erneute Anwendung von (1.2.3) liefert :

$$\begin{aligned}
 (1.2.13) \quad 1 &= \sum_{i,j \in J} \sigma_i(n) \sigma_j(n) \left[\sum_{k \in I_{i+j,p}} \sigma_k(n) b_k(u_i, u_j) + b_{i+j,n}(u_i, u_j) \right. \\
 &\quad \left. + 2b_n(u_{pn}, u_n) - b_n(u_{pn}, u_{pn}) \right] \\
 &= \sum_{l \in I_p} \sigma_l(n) \left[\sum_{\substack{i,j \in J \\ i+j+k=1}} \sum_{k \in I_{i+j,p}} b_k(u_i, u_j) \right] \\
 &\quad + \kappa_n + 2b_n(u_n, u_{pn}) - b_n(u_{pn}, u_{pn}) \\
 &\text{mit } \kappa_n := \sum_{i,j \in J} \sigma_i(n) \sigma_j(n) b_{i+j}(u_i, u_j) = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right) \\
 &\quad (\epsilon > 0 \text{ beliebig}).
 \end{aligned}$$

Da wegen (1.2.4) der Ausdruck in den eckigen Klammern gleich δ_{10} ist, ergibt sich die Gleichung :

$$(1.2.14) \quad \kappa_n + 2b_n(u_n, u_{pn}) - b_n(u_{pn}, u_{pn}) = 0$$

Bezeichnet man die rechte Seite in (1.2.12) mit $h_n(\varphi_n)$ und setzt dort $\varphi_n = u_n$, so ergibt sich wegen der Symmetrie von a_n und b_n

$$(1.2.15) \quad h_n(u_n) = 0$$

$$\text{d.h.} \quad \lambda_{pn} \theta_n \rho_n(u_n) = \tau_n \rho_n(u_n).$$

Hieraus erhält man sofort mit (1.2.6+8)

$$(1.2.16) \quad |\lambda_{pn}| = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{p-\epsilon}\right).$$

Damit ist nur noch die Abschätzung für u_{pn} zu zeigen.

Wendet man auf die Gleichung (1.2.12) die Stabilitätsbedingung

(1.2.5) an, so erhält man, da u_{pn} eine Lösung dieser Gleichung

ist, für u_{pn} eine Darstellung der Form $u_{pn} = w_n + \alpha_n u_n$. Dabei ist w_n die Lösung von (1.2.12) mit $b_n(w_n, u_n) = 0$ und $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Für w_n ($n \geq n_2$) ergibt sich dann die Abschätzung :

$$(1.2.17) \quad \|w_n\|_n \leq C [|\lambda_{pn}| \| \theta_n \circ_n \|_n + \| \tau_n \circ_n \|_n] = O((\frac{1}{n})^{p-\epsilon})$$

wegen (1.2.6+7) und (1.2.16) .

Setzt man diese Darstellung von u_{pn} in (1.2.14) ein , so ergibt sich :

$$(1.2.18) \quad \kappa_n + 2\alpha_n - \|w_n\|_n^2 - \alpha_n^2 = 0$$

d.h. $\alpha_n = 1 \pm (1 + \beta_n)^{1/2}$ mit $\beta_n = \kappa_n - \|w_n\|_n^2$
 und $\beta_n = O((\frac{1}{n})^{p-\epsilon})$ wegen (1.2.13+17) .

Aus (1.2.2) und (1.2.9) erhält man dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{pn}\|_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n - r_n u_0\|_n + \sum_{j \in J \setminus \{0\}} |\sigma_j(n)| \|r_n u_j\|_n) = 0$$

und hieraus mit (1.2.17)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{pn} - w_n\|_n^2 = 0 .$$

Damit ist für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ $|\beta_n| \leq 1$ und

$$\alpha_n = 1 - (1 + \beta_n)^{1/2} = O(|\beta_n|) = O((\frac{1}{n})^{p-\epsilon}) .$$

Dies ergibt zusammen mit (1.2.17) die Abschätzung für u_{pn} und somit die Behauptung des Satzes .

Wir wollen noch kurz auf den Spezialfall ganzzahliger Entwicklungen eingehen . Man hat $I = \mathbb{N}_0$, $J = \{ 0, 1, \dots, p-1 \}$ und $\sigma_j(n) = (\frac{1}{n})^j$. Die Voraussetzungen (1.2.3) und (1.2.4) fordert man dann zweckmäßigerweise in der Form :

(1.2.19) Es existieren symmetrische Bilinearformen

$$a_i, b_i, a_{in}, b_{in} : E_k \times E_l \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \leq k + l + i \leq p-1$$

mit

$$\begin{aligned} n_1 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \quad 0 \leq k+l \leq p-1 \quad (v, w) \in E_k \times E_l \\ a_n(r_n v, r_n w) = \sum_{j=0}^{p-1-k-l} a_j(v, w) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-l} a_{k+l, n}(v, w) \\ b_n(r_n v, r_n w) = \sum_{j=0}^{p-1-k-l} b_j(v, w) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-l} b_{k+l, n}(v, w) . \end{aligned}$$

Die Restglieder genügen einer Abschätzung

$$|a_{in}(v, w)| \leq C'_i(v, w)$$

$$|b_{in}(v, w)| \leq C''_i(v, w)$$

mit C'_i, C''_i unabhängig von n .

(1.2.20) Es existieren Lösungen (u_i, λ_i) des Systems

$$\begin{aligned} 0 \leq l \leq p-1 \quad \varphi \in E_0 \\ \sum_{j=0}^l [a_j(u_{l-j}, \varphi) - \sum_{k=0}^{l-j} \lambda_{l-j-k} b_j(u_k, \varphi)] = 0 \\ \sum_{j=0}^l \sum_{k=0}^{l-j} b_j(u_k, u_{l-j-k}) = \delta_{l0} . \end{aligned}$$

Die Lösung (u_n, λ_n) der diskreten Aufgabe besitzt dann eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} (1.2.21) \quad u_n = \sum_{j=0}^{p-1} r_n u_j \left(\frac{1}{n}\right)^j + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right) \\ \lambda_n = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{j, n} \left(\frac{1}{n}\right)^j + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right) . \end{aligned}$$

Ist überdies $a_j = b_j = 0$ für ungerades j und besitzt das System

$$(1.2.22) \quad 0 \leq l \leq \left[\frac{p-1}{2} \right]$$

$$\sum_{j=0}^1 [a_{2j}(u_{2l-2j}, \varphi) - \sum_{k=0}^{1-j} \lambda_{2l-2j-2k} b_{2j}(u_{2k}, \varphi)] = 0$$

$$\sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^{1-j} b_{2j}(u_{2k}, u_{2l-2j-2k}) = \delta_{l0}$$

Lösungen $(u_{2j}, \lambda_{2j}) \in E_{2j} \times \mathbb{R}$, so besitzt (u_n, λ_n) eine Darstellung wie in (1.2.21) mit $(u_j, \lambda_j) = 0$ für ungerades j , d.h. es liegt eine quadratische Fehlerentwicklung vor.

Diese Spezialfälle entsprechen den Sätzen 4.5 und 4.6 in der Arbeit von Bulirsch [1966]. Dort wurden Eigenwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet. Dabei ist zu beachten, daß die dort aufgestellte Forderung

$$\bigvee_P \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u_n(P) = u(P) \neq 0$$

bei uns durch die übliche Normierungsbedingung $b_n(u_n, u_n) = 1$ und die entsprechende Entwicklung (1.2.3) von b_n ersetzt wurde (siehe auch Grigorieff [1975c], Seite 86).

In den nächsten beiden Kapiteln sollen für die Voraussetzung (1.2.3) des Satzes hinreichende Bedingungen hergeleitet werden, so daß sie von den speziellen Bilinearformen der Methode der finiten Elemente erfüllt werden. Hierzu benötigt man Verallgemeinerungen der Euler-MacLaurinschen Entwicklung, die wir zunächst angeben wollen.

2. Verallgemeinerte Euler-MacLaurin Entwicklungen

In diesem Kapitel soll das asymptotische Verhalten von Trapezregeln, angewandt auf Funktionen mit algebraischen bzw. logarithmischen Singularitäten untersucht werden. Lyness [1976b] zeigte unter anderem, daß sich der Fehler $R_m(f)$ einer m^n -fach angewandten Quadraturformel über einem n -dimensionalen Hyperwürfel in der Form

$$R_m(f) = \sum_{t=0}^{p-1} m^{-\alpha-n-t} [A_t(f) + B_t(f) \log m] + \sum_{s=0}^{l-1} m^{-s} C_s(f) + O(m^{-l})$$

darstellen läßt. Dabei ist $f(x) = r^\alpha \varphi(\theta) h(r) g(x)$ (r, θ hypersphärische Koordinaten zu x) mit hinreichend glatten Funktionen φ , h und g . Es wird $\alpha > -n$ vorausgesetzt, d.h. f integrierbar. Die Beweisidee von Lyness läßt sich jedoch auch auf den Fall nichtintegrierbarer Funktionen übertragen und liefert dann Aussagen über das asymptotische Verhalten der Quadraturformel.

2.1 Eindimensionale Entwicklungen

Eindimensionale Verallgemeinerungen der Euler-MacLaurin Entwicklung sind seit langem bekannt (Navot [1961+62]), ebenso Betrachtungen im Fall nichtintegrierbarer Funktionen. Diese Ergebnisse wollen wir im Satz (2.1.8) zusammenfassen und einen geschlossenen Beweis angeben. Dabei gehen wir von der Eulerschen Summenformel aus, die hier in folgender Form angewandt werden soll:

(2.1.1) Eulersche Summenformel

Seien $a, b, p \in \mathbb{N}$, $a \leq b$ und $f \in C_p[a, b]$. Dann gilt :

$$\sum_{i=a}^b f(i) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{j!} \overline{B}_j(0) \int_a^b f^{(j)}(t) dt + \frac{(-1)^p}{p!} \int_a^b \overline{B}_p(t) f^{(p)}(t) dt .$$

Dabei bedeuten :

(2.1.2) $\overline{B}_j(t) = B_j(t - [t])$ periodisches Bernoullipolynom mit Periode 1 und $\overline{B}_j(k) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\overline{B}_j(k+\epsilon) + \overline{B}_j(k-\epsilon)]$, $k \in \mathbb{N}$
 (d.h. $\overline{B}_1(0) = 0$) .

(2.1.3) $\overline{B}_j(t) = \overline{B}_j(0) - B_j(t)$.

Zum Beweis siehe etwa Olver [1974] , Kap. 8 .

Bemerkung : Da $\overline{B}_j(0)$ für ungerades j verschwindet , kann der Faktor $(-1)^j$ in (2.1.1) weggelassen werden .

Aus (2.1.1) erhält man sofort die klassische Euler-MacLaurin Entwicklung .

(2.1.4) Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $f \in C_p[0, 1]$. Dann gilt :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) \int_0^1 f^{(j)}(t) dt + \frac{1}{n} \int_0^1 \overline{B}_p(nt) f^{(p)}(t) dt \\ &+ \frac{1}{n} \int_0^1 \overline{B}_p(nt) f^{(p)}(t) dt \end{aligned}$$

Bemerkungen :

(2.1.5) Die Entwicklung ist quadratisch , denn $\overline{B}_{2u+1}(0) = 0$ für $u \geq 0$.

(2.1.6) Das Restglied verhält sich wie $O(n^{-p})$.

(2.1.7) $f \in C_p[0, 1]$ kann ersetzt werden durch : $|f^{(p)}|$ integrierbar .

Auf die Funktion $f(t) = t^{-5}(\log t)^2$ kann (2.1.4) nicht angewandt werden. Läßt man jedoch in der Summe den Funktionswert an der Stelle 0 weg, so ist diese wohldefiniert und es kann deren asymptotisches Verhalten für $n \rightarrow \infty$ untersucht werden. Der folgende Satz stellt eine Zusammenfassung bekannter Resultate dar (vgl. Navot [1961+62], Ninham [1966]).

(2.1.8) Satz

Es sei $f_m(t) = t^\alpha (\log t)^m$ für $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt für beliebiges $p, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_m\left(\frac{i}{n}\right) &= \int_1^n f_m(t) dt + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} \bar{B}_j(0) f_m^{(j-1)}(1) \left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l S_p(f_{m-l}) \\ &\quad - \delta_{\alpha, -1} \frac{1}{m+1} (\log \frac{1}{n})^{m+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^p R_{pn}(f_m) \end{aligned}$$

mit

$$(2.1.9) \quad i(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha > -1 \\ 1 & \text{falls } \alpha = -1 \\ \infty & \text{falls } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$(2.1.10) \quad S_p(f_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha > p-1 \\ (-1)^j \zeta^{(j)}(-\alpha) & \text{falls } \alpha < p-1 \text{ und } \alpha \neq -1 \\ \gamma_j & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\text{wobei } \gamma_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\log i)^j - \frac{1}{j+1} (\log n)^{j+1} \right)$$

(vgl. Abramowitz 23.2.5).

$$(2.1.11) \quad R_{pn}(f_m) = \frac{(-1)^p}{p!} \int_{i(\alpha-p)/n}^1 \overline{B}_p(nt) f_m^{(p)}(t) dt$$

und es gilt :

$$|R_{pn}(f_m)| \leq C(1 + \delta_{\alpha, p-1} (\log n)^{m+1}) .$$

Beweis :

Es ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_m\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \sum_{i=1}^n f_{m-l}(i).$$

Auf f_{m-1} wird die Eulersche Summenformel (2.1.1) mit $[a, b] = [1, n]$ angewandt. Die dann auftretenden Integrale werden wie bei Lyness [1976b] umgeformt :

$$\begin{aligned} (2.1.12) \quad \int_1^n f_{m-1}(t) dt &= \int_{n i(\alpha)}^n f_{m-1}(t) dt + \int_1^{i(\alpha)} f_{m-1}(t) dt + \delta_{\alpha, -1} \int_1^n f_{m-1}(t) dt \\ &= \sum_{u=0}^{m-1} \binom{m-1}{u} n^{\alpha+1} (\log n)^u \int_{i(\alpha)}^1 f_{m-1-u}(t) dt \\ &\quad + \int_1^{i(\alpha)} f_{m-1}(t) dt + \delta_{\alpha, -1} \frac{1}{m-1+1} (\log n)^{m-1+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.1.13) \quad \int_1^n \overline{B}_p(t) f_{m-1}^{(p)}(t) dt &= \int_{i(\alpha-p)}^n \overline{B}_p(t) f_{m-1}^{(p)}(t) dt + \int_1^{i(\alpha-p)} \overline{B}_p(t) f_{m-1}^{(p)}(t) dt \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^p \sum_{u=0}^{m-1} \binom{m-1}{u} n^{\alpha+1} (\log n)^u \int_{i(\alpha-p)/n}^1 \overline{B}_p(nt) f_{m-1-u}^{(p)}(t) dt \\ &\quad + \int_1^{i(\alpha-p)} \overline{B}_p(t) f_{m-1}^{(p)}(t) dt . \end{aligned}$$

Für $j=1, \dots, p-1$ ergibt sich :

$$\begin{aligned} (2.1.14) \quad \int_1^n f_{m-1}^{(j)}(t) dt &= f_{m-1}^{(j-1)}(n) - f_{m-1}^{(j-1)}(1) \\ &= \sum_{u=0}^{m-1} \binom{m-1}{u} n^{\alpha-j+1} (\log n)^u f_{m-1-u}^{(j-1)}(1) - f_{m-1}^{(j-1)}(1) . \end{aligned}$$

Beachtet man noch die Identitäten

$$\begin{aligned}
 (2.1.15) \quad & \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l \sum_{u=0}^{m-l} \binom{m-l}{u} (\log n)^u f_{m-l-u}^{(j)}(t) \\
 &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l \sum_{u=0}^l \binom{l}{u} (-1)^u f_{m-l}^{(j)}(t) \\
 &= f_m^{(j)}(t) \quad (j=0, \dots, p)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (2.1.16) \quad & \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l \frac{1}{m-l+1} (\log n)^{m-l+1} \\
 &= (\log \frac{1}{n})^{m+1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \frac{1}{l+1} (-1)^{l+1} \\
 &= -\frac{1}{m+1} (\log \frac{1}{n})^{m+1},
 \end{aligned}$$

so ergibt sich aus (2.1.12-16)

$$\begin{aligned}
 (2.1.17) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_m(\frac{i}{n}) &= \int_{\iota(\alpha)}^1 f_m(t) dt + \frac{(-1)^p}{p!} (\frac{1}{n})^p \int_{\iota(\alpha-p)/n}^1 \overline{B}_p(nt) f_m^{(p)}(t) dt \\
 &+ \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) f_m^{(j-1)}(1) (\frac{1}{n})^j \\
 &+ \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l (\frac{1}{n})^{\alpha+1} \left[\int_1^{\iota(\alpha)} f_{m-l}(t) dt + \frac{1}{2} f_{m-l}(1) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) f_{m-l}^{(j-1)}(1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-1)^p}{p!} \int_1^{\iota(\alpha-p)} \overline{B}_p(t) f_{m-l}^{(p)}(t) dt \right] \\
 &- \delta_{\alpha, -1} \frac{1}{m+1} (\log \frac{1}{n})^{m+1}.
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern wird mit $S_p(f_{m-l})$ bezeichnet. Damit ist formal die Aussage des Satzes gezeigt.

Die Abschätzung des Restglieds folgt im Fall $\alpha \neq p-1$ sofort aus der Tatsache, daß $|\overline{B}_p(nt)| \leq C_p$ (unabhängig von nt) gilt.

Für $\alpha = p-1$ hat man :

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/n}^1 \overline{B}_p(nt) f_m^{(p)}(t) dt \right| &\leq C_p \int_{1/n}^1 |f_m^{(p)}(t)| dt \\ &\leq C_p \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} |f_{m-l}^{(p)}(1)| \int_{1/n}^1 t^{-1} (\log \frac{1}{t})^l dt \\ &= O((\log n)^{m+1}) . \end{aligned}$$

Damit ist nur noch die Darstellung (2.1.10) von $S_p(f_1)$ nachzuweisen.

a) Sei $\alpha > p-1$. Dann ist $f_1^{(j)}(0) = 0$ für $j=0, \dots, p-1$ und

$$\begin{aligned} S_p(f_1) &= - \int_0^1 f_1(t) dt + \frac{1}{2} f_1(1) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) f_1^{(j-1)}(1) \\ &\quad - \frac{(-1)^p}{p!} \int_0^1 [\overline{B}_p(0) - \overline{B}_p(t)] f_1^{(p)}(t) dt \\ &= - \left\{ \int_0^1 f_1(t) dt + \frac{1}{2} f_1(1) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(1) f_1^{(j-1)}(1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p!} \int_0^1 [\overline{B}_p(1) - \overline{B}_p(1-t)] f_1^{(p)}(t) dt \right\} + f_1(1) \\ &= - f_1(1) + f_1(1) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

da der Ausdruck in den geschweiften Klammern die Entwicklung von f_1 nach Bernoullipolynomen an der Stelle 1 darstellt (siehe Krylov S. 15) .

b) Sei $\alpha < p-1$, $\alpha \neq -1$ und speziell $1 = m = 0$.

$$S_p(f_0) = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \overline{B}_j(0) \binom{\alpha}{j-1} + (-1)^p \binom{\alpha}{p} \int_1^{\infty} t^{\alpha-p} [\overline{B}_p(0) - \overline{B}_p(t)] dt$$

Dies ist gerade die Darstellung der Riemannschen Zeta-Funktion, d.h. $S_p(f_0) = \zeta(-\alpha)$ (siehe Abramowitz 23.2.3).

Es gilt also

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \overline{B}_j(0) \binom{\alpha}{j-1} \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \zeta(-\alpha) + \left(\frac{1}{n}\right)^p R_{pn}(f_0).$$

Durch m -maliges Differenzieren nach α und Koeffizientenvergleich mit der Darstellung des Satzes ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l S_p(f_{m-l}) &= \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^m \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \zeta(-\alpha) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1} \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^l \zeta^{(m-l)}(-\alpha) (-1)^{m-l} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

c) Sei nun $\alpha = -1$. Durch partielles Integrieren erhält man

$$S_p(f_j) = S_{p-1}(f_j) \text{ falls } p \geq 2, \text{ d.h.}$$

$$S_p(f_j) = S_1(f_j)$$

$$= \frac{1}{2} f_j(1) + \int_1^{\infty} (t - [t] - \frac{1}{2}) f_j'(t) dt$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f_j(i) - \frac{1}{j+1} (\log n)^{j+1} \right]$$

$$= \gamma_j.$$

Damit ist die Behauptung des Satzes gezeigt.

Mit Hilfe von Satz (2.1.8) lassen sich sofort die entsprechenden Aussagen für Funktionen herleiten, die Singularitäten an beiden Randpunkten besitzen, d.h. von der Form

$$f(t) = t^{\alpha}(\log t)^m(1-t)^{\beta}(\log(1-t))^q g(t)$$

(g hinreichend glatt) sind. Liegt jedoch die Stelle der Singularität im Innern des Intervalls, so ist dies i.a. nicht mehr richtig.

(2.1.18) Beispiel

Sei $f(t) = |t - 2^{-1/2}|^{-1/2}$ mit $I = \int_0^1 f(t) dt = 2.764185$.

In Tabelle 1 wurden die Näherungen T_n (Trapezsumme wie in (2.1.8)) für das Integral, der Fehler $I - T_n$ und der geschätzte Konvergenzfaktor $F_n = \log(|I - T_{n/2}|/|I - T_n|)/\log 2$ aufgeführt.

Man erkennt zwar die Konvergenz der Näherungen, jedoch keinen Faktor, wie das etwa für $f(t) = t^{-1/2}$ in Tabelle 2 zu sehen ist.

n	T_n	$I - T_n$	F_n
2	1.857926	0.906259	--
4	2.505839	0.258346	1.81
8	2.374962	0.389223	-0.59
16	2.505331	0.258854	0.59
32	2.564057	0.200128	0.37
64	2.655120	0.109065	0.88
128	2.657271	0.106914	0.03
256	3.031125	-0.266940	-1.32
512	2.859905	-0.095720	1.48
1024	2.785468	-0.021283	2.17

Tabelle 1

n	T_n	$I - T_n$	F_n
2	0.957107	1.042893	--
4	1.267229	0.732771	0.51
8	1.483036	0.516964	0.50
16	1.634749	0.365251	0.50
32	1.741803	0.258197	0.50
64	1.817446	0.182554	0.50
128	1.870919	0.129081	0.50
256	1.908727	0.091273	0.50
512	1.935461	0.064539	0.50
1024	1.954364	0.045636	0.50

Tabelle 2

Auf Funktionen wie in (2.1.18) soll hier nicht weiter eingegangen werden. Wir wenden uns nun zweidimensionalen Betrachtungen zu.

2.2 Zweidimensionale Trapezregeln

In diesem Abschnitt sollen zweidimensionale Quadraturformeln charakterisiert werden, die als natürliche Erweiterung der eindimensionalen Sehnentrapezregel aufgefaßt werden können. Als Grundgebiet wählen wir zunächst das spezielle Dreieck

$$T_0 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

(2.2.1) Definition (vgl. Lyness/Puri [1973]) :

Eine Trapezregel $Q_{n,T_0}(f)$ ist eine Summe von gewichteten Funktionswerten

$$Q_{n,T_0}(f) = n^{-2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i w_{ij}^{(n)} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$$

mit

$$w_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \in \overset{\circ}{T}_0 \\ 1/2 & \text{falls } \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \in \partial T_0 \setminus \{(0,0), (1,0), (1,1)\} \end{cases}$$

und $w_{n0}^{(n)}, w_{nn}^{(n)}, w_{00}^{(n)}$ unabhängig von n .

(2.2.2) Beispiele :



a) Gewichte $w_{ij}^{(n)}$ für $n=5$

$$\square = 1, \diamond = 1/2$$

$$\circ = 1/4, \triangle = 0$$



b) Gewichte $w_{ij}^{(n)}$ für $n=5$

$$\square = 1, \diamond = 1/2$$

$$\circ = 1/6$$

Die Regel a) ergibt sich, wenn man in x -Richtung diskretisiert, für jeden Diskretisierungspunkt in y -Richtung die eindimensionale Sehnentrapezregel anwendet und auf die so erhaltenen Summen nochmals die Sehnentrapezregel anwendet (Produktregel nach Lyness/Puri). Regel b) erhält man durch Integration der stückweise (auf Teildreiecken) linearen Interpolierenden.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, polygonales, zusammenhängendes Gebiet. Um Trapezregeln für Ω definieren zu können, zerlegen wir Ω in endlich viele Teildreiecke und wenden auf jedes eine Trapezregel an.

Wir beschränken uns allerdings auf eine Teilmenge der Triangulierungen von Ω , die in der Methode der finiten Elemente üblich ist.

(2.2.3) Definition :

Eine zulässige Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N}$ von Ω ist eine Zerlegung von Ω in endlich viele, verschiedene Dreiecke, so daß für je zwei Dreiecke T_i, T_j genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist :

i) $T_i = T_j$

ii) $\overline{T_i} \cap \overline{T_j} = \emptyset$

iii) $\overline{T_i}$ und $\overline{T_j}$ haben genau einen Eckpunkt gemeinsam

iv) $\overline{T_i}$ und $\overline{T_j}$ haben genau eine gemeinsame Seite und in diesem

Fall bildet die Vereinigung von $\overline{T_i}$ und $\overline{T_j}$ ein Parallelogramm.

(2.2.4) Beispiele :



a) zulässig b) zulässig c) nicht zul. d) nicht zul.

Bemerkung :

Die Forderung, daß Dreiecke mit gemeinsamer Seite ein Parallelogramm bilden, ist in der Methode der finiten Elemente nicht üblich und stellt eine starke Einschränkung an das Grundgebiet Ω dar. Die Anwendungen in Kapitel 3 und 4 werden jedoch dadurch wesentlich erleichtert. In den verallgemeinerten Euler-MacLaurin Entwicklungen ändert sich nur die Darstellung der Koeffizienten.

Sei nun $\mathfrak{T} = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N}$ eine zulässige Zerlegung von Ω und $\psi_i : T_0 \rightarrow T_i$ eine affine Transformation mit $\tau = \det(D\psi_i) > 0$ (τ unabhängig von i) d.h.

$$(2.2.5) \quad \psi_i(x, y) = P_{i1} + (P_{i2} - P_{i1})x + (P_{i3} - P_{i1})y \\ (x, y) \in T_0, P_{ij} \text{ Eckpunkte von } T_i.$$

(2.2.6) Definition :

Eine Trapezregel $Q_{n, \Omega}(f)$ ist eine Summe von gewichteten Funktionswerten

$$Q_{n, \Omega}(f) = \tau n^{-2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i w_{kij}^{(n)} f(\psi_i(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})) .$$

Die Faktoren $w_{kij}^{(n)}$ sind für jedes k die Gewichte einer Trapezformel für T_0 .

Zweckmäßigerweise wählt man für die Eckpunkte der Dreiecke T_k das Gewicht $w_{kij}^{(n)} = 1/6$ (Beispiel (2.2.2) b)). Dadurch wird erreicht , daß alle Funktionswerte im Innern von Ω dasselbe Gewicht besitzen.

2.3 Zweidimensionale Summenformeln

Um Verallgemeinerungen der Euler-MacLaurin Entwicklungen nachweisen zu können , gehen wir wie im Abschnitt (2.1) vor und beweisen zuerst eine Summenformel , deren Anwendung dann die gewünschten Ergebnisse liefert.

Bei Lyness/Puri [1973] findet sich eine entsprechende Aussage für einen dreidimensionalen Simplex. Da wir die spezielle Gestalt der einzelnen Terme benötigen , soll hier kurz der Beweis für den zweidimensionalen Fall durchgeführt werden.

(2.3.1) Zweidimensionale Summenformel

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \leq b$, $T_{ab} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq x\}$
und $f \in C_p(T_{ab})$ mit $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt :

$$\begin{aligned} \sum_{i=a}^b \sum_{j=0}^i f(i, j) = & \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{B}_i(0) \overline{B}_{j-i}(0) \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\right)^i \left[\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f(x, y) dy \right] dx \\ & + \frac{(-1)^p}{p!} \left\{ \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \overline{B}_{p-i}(0) \int_a^b \overline{B}_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \left[\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f(x, y) dy \right] dx \right. \\ & \left. + \sum_{i=a}^b \int_0^i \overline{B}_p(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(i, y) dy \right\}. \end{aligned}$$

Beweis :

Wegen $f(i, \cdot) \in C_p[0, i]$ ($a \leq i \leq b$) läßt sich die eindimensionale Summenformel (2.1.1) anwenden und man erhält :

$$\begin{aligned} \sum_{i=a}^b \sum_{j=0}^i f(i, j) = & \sum_{i=a}^b \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) \int_0^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(i, y) dy \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^p}{p!} \int_0^i \overline{B}_p(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(i, y) dy \right\} \end{aligned}$$

Setzt man $f_j(x) = \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x, y) dy$, dann ist $f_j \in C_{p-j}[a, b]$.

Erneute Anwendung von (2.1.1) liefert dann die Behauptung.

(2.3.2) Bemerkung :

Die Voraussetzung $f \in C_p(T_{ab})$ läßt sich wie in (2.1.8) abschwächen. Es genügt, wenn alle p -ten Ableitungen absolut integrierbar sind.

Mit dieser Formel kann man nun sofort die Euler-MacLaurin Entwicklung für T_0 im Fall hinreichend glatter Funktionen nachweisen.

(2.3.3) Euler-MacLaurin Entwicklung für T_0

Sei $f \in C_p(T_0)$ und $p, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathfrak{B}_j(f) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^p \mathfrak{R}_{pn}(f)$$

mit

$$(2.3.4) \quad \mathfrak{B}_j(f) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{B}_i(0) \overline{B}_{j-i}(0) \int_0^1 \left(\frac{d}{dx}\right)^{j-i} \left[\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x, y) dy \right] dx$$

$\mathfrak{B}_j \equiv 0$ falls j ungerade

$$(2.3.5) \quad \mathfrak{R}_{pn}(f) = \frac{(-1)^p}{p!} \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \overline{B}_j(0) \int_0^1 \overline{B}_{p-j}(nx) \left(\frac{d}{dx}\right)^{p-j} \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x, y) dy dx \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \overline{B}_j(ny) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f\left(\frac{i}{n}, y\right) dy \right\}$$

und es gilt : $|\mathfrak{R}_{pn}(f)| \leq C(f)$ (unabhängig von n) .

Beweis :

Man ersetze in (2.3.1) $f(i, j)$ durch $f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ und transformiere die auftretenden Integrale.

Bemerkungen :

(2.3.6) Es liegt hier eine Trapezregel für T_0 wie in Beispiel (2.2.2a) vor. Nimmt man eine beliebige Trapezregel $\mathfrak{Q}_n$, so ändert sich an der Entwicklung nur die Darstellung des Terms $\mathfrak{B}_2$ (falls $p \geq 3$).

Es gilt dann :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{2,Q_n}(f) &= \mathfrak{B}_2(f) + w_{00}^{(n)} f(0,0) + (w_{0n}^{(n)} - \frac{1}{4}) f(0,1) \\ &\quad + (w_{nn}^{(n)} - \frac{1}{4}) f(1,1) . \end{aligned}$$

Für $p \leq 2$ ändert sich nur die Darstellung des Restes.

(2.3.7) Die in (2.3.4+5) angegebenen Darstellungen sind nur eine von vielen möglichen. Die Koeffizienten $\mathfrak{B}_j$ lassen sich z.B. als Gebietsintegrale über j-te Ableitungen + Randintegrale über j-1-te Ableitungen + j-2-te Ableitungen an den Eckpunkten von T_0 beliebig kombinieren. Ähnliches gilt für den Rest (siehe auch Lyness/McHugh [1969]).

Als nächstes betrachten wir Funktionen , die in einem Eckpunkt von T_0 (o.E.d.A. (0,0)) eine algebraische bzw. logarithmische Singularität besitzen. Für Funktionen mit Singularitäten im Innern von T_0 kann man i. a. keine entsprechenden Ergebnisse nachweisen (siehe auch (2.1.18)). Verschiedene , von uns durchgeführte Experimente lassen vermuten , daß für Funktionen , die auf speziellen Kurven (z.B. Geraden) singulär sind , unter Umständen Entwicklungen existieren . Monegato und Lyness ([1979]) zeigen dies für $f(x,y)=g(x,y)/(x-y)$ im Einheitsquadrat. Wir werden unsere Überlegungen jedoch auf die zuerst genannten Arten beschränken.

Der folgende Satz stellt das zweidimensionale Analogon zu (2.1.8) dar. Er beinhaltet zum Teil Ergebnisse , die erst kürzlich von Lyness und Monegato ([1980]) gezeigt wurden.

(2.3.8) Satz :

Es sei $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in C_p[0, \pi/4]$.

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < x$ und $0 \leq y \leq x$ sei

$$f_m(x, y) = r^\alpha (\log r)^m \varphi(\theta) \quad (r, \theta \text{ Polarkoordinaten zu } x, y) .$$

Dann gilt für beliebiges $k \leq n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^i f_m\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \\ \sum_{j=0}^{p-1} \mathfrak{B}_j(f_m) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^p \mathfrak{R}_{pn}(f_m) \\ + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} [S_{pk}(f_l) + \frac{1}{m-l+1} \log \frac{1}{n} L_p(f_l)] . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten besitzen folgende Darstellung :

$$(2.3.9) \quad \mathfrak{B}_j(f_m) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{\mathfrak{B}}_i(0) \overline{\mathfrak{B}}_{j-i}(0) \int_{(\alpha-j+1)}^1 \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_m(x, y) dy dx$$

$$\mathfrak{B}_j = 0 \text{ falls } j \text{ ungerade}$$

$$\begin{aligned} (2.3.10) \quad S_{pk}(f_1) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=k}^s \sum_{j=0}^i f_1\left(\frac{i}{s}, \frac{j}{s}\right) \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{\mathfrak{B}}_i(0) \overline{\mathfrak{B}}_{j-i}(0) \int_{(\alpha-j+1)}^s \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_1(x, y) dy dx \right\} \end{aligned}$$

$$\text{falls } \alpha < p-2$$

$$S_{pk}(f_1) = 0 \text{ falls } \alpha \geq p-2$$

$$\begin{aligned} (2.3.11) \quad L_p(f_1) = - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \delta_{\alpha, j-2} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{\mathfrak{B}}_i(0) \overline{\mathfrak{B}}_{j-i}(0) \times \\ \times \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_m(x, y) dy \Big|_{x=1} \end{aligned}$$

$$L_p(f_1) = 0 \text{ falls } \alpha \notin [-2, p-3] \cap (2\mathbb{N}_0) .$$

Das Restglied genügt einer Abschätzung :

$$(2.3.12) \quad |R_{pn}(f_m)| \leq C(1 + \delta_{\alpha, p-2}(\log n)^{m+1}) .$$

Bemerkung :

a) In den Koeffizienten der Entwicklung müßte korrekterweise durch Indizierung der Bezug zum Grundgebiet und zur verwendeten Quadraturformel hergestellt werden , also etwa $\mathbb{R}_{j,T,Q}$. Wir werden dies jedoch nur dann berücksichtigen , wenn auf spezielle Gebiete besonders hingewiesen werden soll. Wenn jedoch alles aus dem Zusammenhang hervorgeht , wird auf die zusätzlichen Indizes verzichtet.

b) Der hier gewählte Summationsanfang $i=k$ anstelle des üblichen $i=1$ (vgl. (2.1.8)) ist nicht von Bedeutung. Diese "Verallgemeinerung" erleichtert die Anwendung des Satzes in Kapitel 3.

Beweis :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^i f_m\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} \left\{ \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^i f_l(i, j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k f_l(k, j) \right\} \end{aligned}$$

Auf die Doppelsumme in den geschweiften Klammern wird nun die zweidimensionale Summenformel (2.3.1) angewandt. Es treten dann folgende Terme auf :

$$(2.3.13) \quad t_{ij}^1 = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \int_k^n \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_l(x, y) dy dx$$

für $0 \leq j \leq p-1$, $0 \leq i \leq j$.

$$(2.3.14) \quad t_i^2 = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \int_k^n \bar{B}_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f_1(x,y) dy dx$$

für $1 \leq i \leq p$

$$(2.3.15) \quad t^3 = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{i=k}^n \int_0^1 B_p(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_1(i,y) dy$$

Setzt man $h_1(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_1(x,y) dx$ (i, j fest), dann gilt:

$$\begin{aligned} h_1(zx) &= z^{-i} \left(\frac{d}{dx}\right)^i \left[\int_0^{xz} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_1(xz,y) dy \right] \\ &= z^{1-i} \left(\frac{d}{dx}\right)^i \left[\int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_1(zx,zy) dy \right] \\ &= \sum_{\mu=0}^{F2} \binom{1}{\mu} z^{\alpha-j+1} (\log z)^{1-\mu} h_{\mu}(x). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$(2.3.16) \quad h_1(x) = \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} x^{\alpha-j+1} (\log x)^{1-\mu} h_{\mu}(1)$$

$$(2.3.17) \quad h_1(nx) = \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} n^{\alpha-j+1} (\log \frac{1}{n})^{1-\mu} (-1)^{1-\mu} h_{\mu}(x).$$

Aus (2.3.16) folgt, daß $h_1(x) = O(x^{\alpha-j+1} |\log x|)$ für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$. Das Integral in (2.3.13) kann daher in folgender Weise zerlegt werden:

$$\begin{aligned} (2.3.18) \quad \int_k^n h_1(x) dx &= \int_{n^{-(\alpha-j+1)}}^n h_1(x) dx + \int_k^{n^{-(\alpha-j+1)}} h_1(x) dx \\ &+ \delta_{\alpha, j-2} \int_1^n h_1(x) dx. \end{aligned}$$

Für den ersten Anteil erhält man mit (2.3.17):

$$\begin{aligned}
 (2.3.19) \quad \int_1^n h_1(x) dx &= n \int_1^1 h_1(nx) dx \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^{j-2-\alpha} \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} (\log \frac{1}{n})^{1-\mu} (-1)^{1-\mu} \int_1^1 h_{\mu}(x) dx .
 \end{aligned}$$

Für das letzte der Integrale in (2.3.18) ergibt sich im Fall $\alpha = j-2$ mit (2.3.16) :

$$\begin{aligned}
 (2.3.20) \quad \int_1^n h_1(x) dx &= \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} h_{\mu}(1) \int_1^n x^{-1} (\log x)^{1-\mu} dx \\
 &= \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} h_{\mu}(1) \frac{(-1)^{1-\mu+1}}{1-\mu+1} (\log \frac{1}{n})^{1-\mu+1} .
 \end{aligned}$$

Setzt man dies in (2.3.13) ein , so läßt sich t_{ij}^1 in der folgenden Form darstellen :

$$\begin{aligned}
 (2.3.21) \quad t_{ij}^1 &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} (\log \frac{1}{n})^{m-\mu} (-1)^{1-\mu} \int_1^1 h_{\mu}(x) dx \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} (\log \frac{1}{n})^{m-1} \int_k^{(\alpha-j+1)} h_1(x) dx \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{\alpha, j-2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} (\log \frac{1}{n})^{m-\mu+1} \frac{(-1)^{1-\mu+1}}{1-\mu+1} h_{\mu}(1) \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} (\log \frac{1}{n})^{m-\mu} \int_1^1 h_{\mu}(x) dx \sum_{l=0}^{m-\mu} \binom{m-\mu}{l} (-1)^l \\
 &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-1} \int_k^{(\alpha-j+1)} h_1(x) dx \\
 &\quad + \delta_{\alpha, j-2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} (\log \frac{1}{n})^{m-\mu+1} h_{\mu}(1) \sum_{l=0}^{m-\mu} \binom{m-\mu}{l} \frac{(-1)^{l+1}}{l+1} .
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch die Identitäten (2.1.15+16), so erhält man schließlich für t_{ij}^1 :

$$\begin{aligned}
 (2.3.22) \quad t_{ij}^1 &= \left(\frac{1}{n}\right)^j \int_{i(\alpha-j+1)}^1 h_m(x) dx \\
 &+ \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l-1} \int_k^{i(\alpha-j+1)} h_l(x) dx \\
 &- \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l+1} h_l(1) \frac{1}{m-l+1} .
 \end{aligned}$$

Summiert man über alle Indizes i, j unter Berücksichtigung der entsprechenden Faktoren, so ist bereits die Darstellung der Koeffizienten B_j und L_p gezeigt.

Das Vorgehen bei den Termen t_i^2 und t^3 ist nun ähnlich.

Das Integral in (2.3.14) wird in folgender Weise zerlegt :

$$\begin{aligned}
 (2.3.23) \quad \int_k^n \bar{B}_i(x) h_1(x) dx &= \int_{i(\alpha-p+1)}^n \dots + \int_k^{i(\alpha-p+1)} \dots \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2-\alpha} \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} (\log \frac{1}{n})^{1-\mu} (-1)^{1-\mu} \int_{i(\alpha-p+1)/n}^1 \bar{B}_i(xn) h_\mu(x) dx \\
 &+ \int_k^{i(\alpha-p+1)} \bar{B}_i(x) h_1(x) dx .
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit denselben Umformungen wie in (2.3.21) :

$$\begin{aligned}
 (2.3.24) \quad t_i^2 &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l-1} \int_k^{i(\alpha-p+1)} \bar{B}_i(x) h_l(x) dx \\
 &+ \left(\frac{1}{n}\right)^p \int_{i(\alpha-p+1)/n}^1 \bar{B}_i(xn) h_m(x) dx .
 \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $\bar{B}_i$ und der Darstellung (2.3.16) verhält sich der Faktor von n^{-p} wie $O(1+\delta_{\alpha,p-2}(\log n)^{m+1})$.

Definiert man

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \int_0^t \overline{B}_p(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_1(t, y) dy = t \int_0^1 \overline{B}_p(ty) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_1(t, ty) dy \\ &= \sum_{\mu=0}^1 \binom{1}{\mu} (\log t)^{1-\mu} t^{\alpha-p+1} \int_0^1 \overline{B}_p(ty) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_{\mu}(1, y) dy, \end{aligned}$$

dann ist die Reihe $\sum_i g_1(i)$ im Fall $\alpha < p-2$ absolut konvergent.
Daher läßt sich die Summe in (2.3.15) zerlegen :

$$\sum_{i=k}^n g_1(i) = \sum_{i=k}^{\infty} g_1(i) - \sum_{i=n}^{\infty} g_1(i) \quad \text{falls } \alpha < p-2.$$

Mit den bisher angewandten Umformungen erhält man außerdem :

$$\sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} g_1(i) = \left(\frac{1}{n}\right)^{p+1} \int_0^{1/n} \overline{B}_p(ny) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_m\left(\frac{1}{n}, y\right) dy.$$

Damit ergibt sich für t^3 :

$$\begin{aligned} (2.3.25) \quad t^3 &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log \frac{1}{n})^{m-l} \chi_{(-\infty, p-2)}(\alpha) \sum_{i=k}^{\infty} g_1(i) \\ &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^p \sigma_n \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (2.3.26) \quad \sigma_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n \int_0^{1/n} \overline{B}_p(ny) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_m\left(\frac{1}{n}, y\right) dy = O(1 + \delta_{\alpha, p-2} (\log n)^{m+1}) \\ &\quad \text{falls } \alpha \geq p-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\frac{1}{n} \sum_{i=n}^{\infty} \int_0^{1/n} \overline{B}_p(ny) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_m\left(\frac{1}{n}, y\right) dy = O(1) \\ &\quad \text{falls } \alpha < p-2. \end{aligned}$$

Faßt man alle Terme mit dem gemeinsamen Faktor $(\frac{1}{n})^{\alpha+2}(\log \frac{1}{n})^{m-1}$ zusammen, so ergibt sich

$$(2.3.27) \quad S'_{pk}(f_1) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k f_1(k, j) \\ + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{B}_i(0) \overline{B}_{j-i}(0) \int_k^{(\alpha-j+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} f_1(x, y) dy dx \\ + \frac{(-1)^p}{p!} \left\{ \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \overline{B}_{p-i}(0) \int_k^{(\alpha-p+1)} \overline{B}_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f_1(x, y) dy dx \right. \\ \left. + \chi_{(-\infty, p-2)}(\alpha) \sum_{i=k}^{\infty} \int_0^i \overline{B}_p(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f_1(i, y) dy \right\}$$

und für Terme mit dem Faktor n^{-p}

$$(2.3.28) \quad R'_{pn}(f_m) = \frac{(-1)^p}{p!} \left\{ \sigma_n + \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \overline{B}_{p-i}(0) \int_{(\alpha-p+1)/n}^1 \overline{B}_i(nx) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f_m(x, y) dy dx \right\}.$$

Zur Vereinfachung des Terms S'_{pk} im Fall $\alpha < p-2$ wendet man auf die Integrale der Form $\int \overline{B}_j(x)$ die Eulersche Summenformel (2.1.1) an und erhält für den Anteil in den geschweiften Klammern:

$$(2.3.29) \quad \frac{(-1)^p}{p!} \left\{ \quad \right\} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(p-i)!} \overline{B}_{p-i}(0) \times \\ \times \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=k}^s \int_0^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f_1(i, y) dy \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) \int_k^s \left(\frac{d}{dx}\right)^j \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f_1(x, y) dy dx \right] \\ + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^s \left[\sum_{j=0}^i f_1(i, j) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \overline{B}_j(0) \int_0^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-i} f_1(i, y) dy \right].$$

Faßt man die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern zusammen ,
so ergibt sich durch Umsummieren folgender Ausdruck :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=k}^s \sum_{j=0}^i f_1(i, j) \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{B}_i(0) \overline{B}_{j-i}(0) \int_k^s \left(\frac{d}{dx} \right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{j-i} f_1(x, y) dy dx \right].$$

Setzt man dies in (2.3.27) ein , so erhält man genau die Darstellung (2.3.10) von $S_{pk}(f_1)$. Mit der Definition

$$(2.3.30) \quad S_{pk}(f_1) = S'_{pk}(f_1) \quad \text{falls } \alpha < p-2 \\ = 0 \quad \text{falls } \alpha \geq p-2$$

und

$$(2.3.31) \quad R_{pn}(f_m) = R'_{pn}(f_m) \quad \text{falls } \alpha < p-2 \\ = R'_{pn}(f_m) + \left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\log_n^1)^{m-l} S'_{pk}(f_1) \\ \text{falls } \alpha \geq p-2$$

ist dann die Behauptung des Satzes gezeigt.

Mit Satz (2.3.8) und (2.3.3) kann man für jedes Gebiet Ω und jede Trapezregel $Q_{n\Omega}$ das asymptotische Verhalten bestimmen. Aus der Definition ergibt sich sofort, daß man $Q_{n\Omega}$ in der Form

$$Q_{n\Omega}(f) = \sum_{i=1}^N Q_{nT_0}(f\psi_i)$$

schreiben kann. Hierauf wendet man auf jede der Formeln für T_0 (2.3.3) (wenn $f\psi_i$ glatt) oder (2.3.8) (wenn $f\psi_i$ singular) an. Die so erhaltene Entwicklung für $Q_{n\Omega}$ unterscheidet sich

qualitativ nicht von denen für T_0 . Wir fassen dies in folgendem Satz zusammen :

(2.3.32) Satz :

Es sei Ω wie im Abschnitt (2.1), $0 \in \Omega$ Eckpunkt und $f \in C_p(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$. Dann gilt für jede Trapezregel $Q_{n\Omega}$:

$$Q_{n\Omega}(f) = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{j\Omega}(f) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^p \beta_{pn\Omega}(f) \\ + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+2} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left(\log \frac{1}{n}\right)^{m-l} [S_{p\Omega}^{(l)}(f) + \log \frac{1}{n} L_{p\Omega}^{(l)}(f)].$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern kann für $f \in C_p(\overline{\Omega})$ weggelassen werden. Andernfalls berechnet er sich aus dem singulären Anteil bei 0. Ist f integrierbar, d.h. $\alpha > -2$, dann gilt :

$$\beta_{0\Omega}(f) = \iint_{\Omega} f(x,y) dy dx.$$

Auf die speziellen Darstellungen der einzelnen Koeffizienten soll hier verzichtet werden. Wir werden sie, soweit benötigt, im nächsten Kapitel angeben, wo das asymptotische Verhalten spezieller Bilinearformen untersucht wird.

3. Asymptotische Entwicklungen von Bilinearformen

Es soll das asymptotische Verhalten einer Folge von Bilinearformen

$$h_n : D_n \times D_n \rightarrow \mathbb{R}$$

für $n \rightarrow \infty$ qualitativ beschrieben werden. Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich h_n durch Trapezsummen der Gestalt beschreiben, wie sie in Kapitel 2 betrachtet wurden. Mit Hilfe der Sätze (2.3.3) und (2.3.8) bzw. (2.3.32) erhält man dann die gewünschten Aussagen. Die Betrachtungen orientieren sich stark an den späteren Anwendungsmöglichkeiten in der Methode der finiten Elemente und deren speziellen Bilinearformen. Die Beweistechnik läßt sich jedoch auch auf andere Probleme übertragen.

3.1 Darstellung von Bilinearformen durch Trapezsummen

Im Hinblick auf die bereits erwähnten Anwendungen wollen wir als Definitionsbereich der Bilinearformen endlichdimensionale Funktionenräume wählen, die homogene Randbedingungen erfüllen. Basisfunktionen von D_n sollen Lagrangefunktionen bezüglich einer Menge von Gitterpunkten sein, die Stützstellen einer Trapezregel sind. Dadurch ist es möglich, die Bilinearformen als Summe von Funktionswerten an diesen Punkten darzustellen, d.h. als Trapezsumme. Dazu führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet und $\mathcal{T} = \{T_i\}_{1 \leq i \leq M}$ eine zulässige Triangulierung gemäß (2.2.3) .

$\psi_i : T_0 \rightarrow T_i$ seien affine Transformationen wie in (2.2.5) mit der zusätzlichen Forderung , daß $\psi_i(0) = 0$ für $i=1, \dots, M_0$.

Dabei ist die Numerierung der Dreiecke T_i so gewählt , daß 0 Eckpunkt von $T_1, \dots, T_{M_0}$ ist und $0 \in \bar{T}_i$ für $i > M_0$.

Weiterhin nehmen wir an , daß das Gebiet Ω im Nullpunkt einen Innenwinkel $\theta = \alpha\pi$ mit $0 < \alpha < 2$ besitzt.

(3.1.1) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega_n = \{P \in \bar{\Omega} \mid \bigvee_{1 \leq l \leq M} \bigvee_{0 \leq i \leq n} \bigvee_{0 \leq j \leq i} P = \psi_l(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\}$$

(Gitterpunkte einer Triangulierung)

$$\dot{\Omega}_n = \Omega_n \cap \dot{\Omega} = \{Q_1^{(n)}, \dots, Q_{N_n}^{(n)}\}$$

$$\partial\Omega_n = \Omega_n \cap \partial\Omega$$

$$K_\alpha = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha\pi, 0 \leq r\}$$

$$U_0 = \bigcup_{i=1}^{M_0} T_i \subset K_\alpha \quad (\text{polygonale Umgebung der } 0 \text{ in } K_\alpha)$$

Als Basis der endlichdimensionalen Räume D_n wählen wir stetige Funktionen auf $\bar{\Omega}$, die auf dem Rand verschwinden und Lagrange-funktionen bzgl. Ω_n sind.

(3.1.2) $D = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in C(\dot{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}$

$$D_n = \text{span} (b_1^{(n)}, \dots, b_{N_n}^{(n)}) \subset D$$

$$\text{mit } b_i^{(n)}(Q_j^{(n)}) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N_n$$

$$\text{und } |b_i^{(n)}(Q)| \leq C \text{ (unabhängig von } n, i \text{ und } Q) .$$

Jedes Element $g \in D_n$ besitzt also eine Darstellung der Form

$$(3.1.3) \quad g = \sum_{i=1}^N g(Q_i^{(n)}) b_i^{(n)}.$$

Für $u \in D$ läßt sich eine Interpolierende in D_n erklären durch :

$$(3.1.4) \quad r_n : D \rightarrow D_n \\ u \mapsto \sum_{i=1}^N u(Q_i^{(n)}) b_i^{(n)}.$$

Sei nun $h_n : D_n \times D_n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von symmetrischen Bilinearformen. Es soll das asymptotische Verhalten von $h_n(r_n u, r_n v)$ für $(u, v) \in D \times D$ qualitativ beschrieben werden.

Mit Hilfe der induzierten Abbildung

$$(3.1.5) \quad h_n^* : D_n \rightarrow D_n \\ g \mapsto \sum_{i=1}^N h_n(b_i^{(n)}, g) b_i^{(n)}$$

läßt sich h_n formal als Trapezsumme schreiben :

$$(3.1.6) \quad \bigwedge_{f, g \in D_n} h_n(f, g) = \sum_{i=1}^N f(Q_i^{(n)}) h_n^*(g)(Q_i^{(n)}) \\ = \sum_{P \in \Omega_n} f(P) h_n^*(g)(P) .$$

Wesentlich für die folgenden Betrachtungen ist nun die Existenz einer lokalen Entwicklung für h_n^* , wie sie etwa von Stetter [1965] oder Bulirsch [1966] bei der Behandlung von Operatorgleichungen gefordert wurde. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt formulieren.

3.2 Lokale Entwicklung der induzierten Abbildung

(3.2.1) Definition :

h_n^* besitzt eine lokale Entwicklung der Ordnung $p \in \mathbb{N}$
wenn gilt :

Es existieren Teilräume $\{0\} \neq E_i \subset D \cap C_{p-i}(\overline{N})$, $j=0, \dots, p-1$,
mit $E_i \subset E_j$ für $i < j$ und lineare Abbildungen

$$\eta_i : E_{p-i} \rightarrow C(\overline{N}) \quad i=0, \dots, p-1$$

$$\eta_{in} : E_{p-i} \rightarrow D_n \quad i=0, \dots, p-1$$

mit $\eta_i(E_{p-j}) \subset C_{j-i}(\overline{N})$ für $i \leq j$, so daß gilt

$$\bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} \bigwedge_{0 \leq i \leq p-1} \bigwedge_{u \in E_i} \bigwedge_{Q \in \dot{N}_n}$$

$$h_n^*(r_n u)(Q) = \sum_{j=0}^{p-1-i} \eta_j(u)(Q) \left(\frac{1}{n}\right)^{j+2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{p+2-i} \eta_{p-i,n}(u)(Q).$$

Das Restglied genügt einer Abschätzung :

$$|\eta_{p-i,n}(u)(Q)| \leq C_{p-i}(u) \text{ unabhängig von } n \text{ und } Q.$$

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß diese Voraussetzung

hinreichend für eine asymptotische Entwicklung von $h_n(r_n u, r_n v)$

nach ganzzahligen Potenzen von $\frac{1}{n}$ ist. Dies gilt jedoch nur für

hinreichend glatte Funktionen u und v . Für Funktionen mit Singularitäten müssen zusätzliche Forderungen an h_n gestellt werden.

Diese Bedingungen besagen im wesentlichen, daß h_n^* als Differenzenoperator mit konstanten Koeffizienten interpretiert werden kann,

der zu einem Differentialoperator der Ordnung σ_n konsistent ist.

Zusätzliche Forderungen an h_n^* :

$$(3.2.2) \quad \forall_{\kappa > 0} \quad \forall_{\sigma_h \in \mathbb{N}_0} \quad \forall_{\mathfrak{h}_h} \quad \mathfrak{h}_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{h}_h(P) = 0 \text{ falls } |P| \geq \kappa$$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{g \in D_n} \bigwedge_{P \in \hat{\Omega}_n} h_n^*(g)(P) = \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h} \sum_{Q \in \Omega_n} \mathfrak{h}_h(n(P-Q))g(Q)$$

$$(3.2.3) \quad \bigwedge_{0 \leq j \leq \sigma_h - 1} \bigwedge_{P \in \hat{\Omega}_n} \sum_{Q \in \Omega_n} \mathfrak{h}_h(n(P-Q)) D_{P-Q}^j \equiv 0$$

$$\text{mit } D_R = R^* \nabla = r_1 \frac{\partial}{\partial x} + r_2 \frac{\partial}{\partial y} \text{ für } R = (r_1, r_2)$$

$$(3.2.4) \quad \text{Die Menge } V_h = \{n(P-Q) \mid Q \in \Omega_n, \mathfrak{h}_h(n(P-Q)) \neq 0\}$$

sei unabhängig von n und $P \in \hat{\Omega}_n$.

Insbesondere ist V_h dann endlich und die Punkte

$P + \frac{1}{n}Q$, $Q \in V_h$ beschreiben den "Differenzenstern" im Punkt P .

Für h_n^* ergibt sich damit die Darstellung

$$(3.2.5) \quad h_n^*(g)(P) = \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h} \sum_{Q \in V_h} \mathfrak{h}_h(Q)g\left(P + \frac{1}{n}Q\right).$$

In folgendem Lemma wird gezeigt, daß die Bedingungen (3.2.2-4) hinreichend für die Existenz einer lokalen Entwicklung von h_n^* sind.

(3.2.6) Lemma :

Unter den Voraussetzungen (3.2.2-4) existiert eine lokale Entwicklung für h_n^* für beliebiges $p \in \mathbb{N}$.

Beweis :

Sei $u \in E_i := C_{p+\sigma_h-i}(\bar{\Omega}) \cap D$ und $P \in \hat{\Omega}_n$. Dann gilt mit
 $k := p + \sigma_h - i$:

$$\begin{aligned}
 (3.2.7) \quad h_n^*(r_n u)(P) &= \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h} \sum_{Q \in V_h} \mathfrak{f}_h(Q) u(P + \frac{1}{n}Q) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \sum_{Q \in V_h} \mathfrak{f}_h(Q) D_Q^j u|_P \left(\frac{1}{n}\right)^{j+2-\sigma_h} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{p+2-i} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{Q \in V_h} \int_0^1 (1-s)^{k-1} D_Q^k u(P + \frac{s}{n}Q) ds \\
 &= \sum_{j=0}^{p-1-i} \frac{1}{j!} \sum_{Q \in V_h} \mathfrak{f}_h(Q) D_Q^{j+\sigma_h} u|_P \left(\frac{1}{n}\right)^{j+2} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{p+2-i} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{Q \in V_h} \int_0^1 (1-s)^{k-1} D_Q^k u(P + \frac{s}{n}Q) ds \\
 &= : \sum_{j=0}^{p-1-i} \eta_j(u)|_P \left(\frac{1}{n}\right)^{j+2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{p+2-i} \eta_{p-i,n}(u)(P) .
 \end{aligned}$$

Die Beschränktheit von $\eta_{p-i,n}(u)$ folgt aus der Differenzierbarkeitsvoraussetzung.

3.3 Entwicklung symmetrischer Bilinearformen

Es soll als erstes gezeigt werden , daß die Existenz einer lokalen Entwicklung für h_n^* hinreichend für eine asymptotische Entwicklung von $h_n(r_n u, r_n v)$ nach ganzzahligen Potenzen von $\frac{1}{n}$ ist. Die Koeffizienten sind wiederum symmetrische Bilinearformen. Sie ist quadratisch , wenn die ungeraden Potenzen in (3.2.1) verschwinden.

(3.3.1) Satz :

Die induzierte Abbildung h_n^* besitze eine lokale Entwicklung der Ordnung p . Dann existieren symmetrische Bilinearformen H_j , $H_{jn} : E_k \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq j+k+1 \leq p-1$ mit der Eigenschaft :

$$\bigwedge_{n \geq n_0} \bigwedge_{0 \leq k+1 \leq p-1} \bigwedge_{(v,w) \in E_k \times E_1}$$

$$h_n(r_n v, r_n w) = \sum_{j=0}^{p-1-k-1} H_j(v, w) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-1} H_{k+1,n}(v, w) .$$

Das Restglied genügt einer Abschätzung :

$$|H_{k+1,n}(v, w)| \leq C_{k+1}(v, w) \text{ unabhängig von } n.$$

Beweis :

Da $w \in E_1 \subset E_{k+1}$ folgt aus (3.2.1) und (3.1.6) :

$$\begin{aligned} h_n(r_n v, r_n w) &= \sum_{p \in \hat{\Omega}_n} v(P) h_n^*(r_n w)(P) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1-k-1} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2\tau} \sum_{p \in \hat{\Omega}_n} v(P) \eta_j(w)(P) \right] \tau^{-1} \left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-1} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{p \in \hat{\Omega}_n} v(P) \eta_{p-k-1,n}(w)(P) \right\} . \end{aligned}$$

Wegen $v \in E_k \subset C_{p-k}(\bar{\Omega})$ und $\eta_j(w) \in C_{p-1-j}(\bar{\Omega})$ ist das Produkt $\eta_j(w)v \in C_{p-k-1-j}(\bar{\Omega})$. Da außerdem die Summe in den eckigen Klammern eine Trapezregel für Ω ist (wegen $v = 0$ auf $\partial\Omega$), läßt sich (2.3.32) anwenden und man erhält :

$$\begin{aligned} h_n(r_n v, r_n w) &= \sum_{j=0}^{p-1-k-1} \left[\sum_{i=0}^{p-1-k-1-j} \mathfrak{R}_{i\Omega}(v \eta_j(w)) \left(\frac{1}{n}\right)^i \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-1-j} \mathfrak{R}_{p-k-1-j,n,\Omega}(v \eta_j(w)) \right] \tau^{-1} \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-1} \{ \quad \} . \end{aligned}$$

Setzt man für $j=0, \dots, p-1$

$$(3.3.2) \quad H_j(v, w) = \tau^{-1} \sum_{i=0}^j \beta_{i\Omega} (v \eta_{j-i}(w))$$

$$(3.3.3) \quad H_{jn}(v, w) = \tau^{-1} \sum_{i=0}^{p-1-j} \alpha_{p-j-i, n, \Omega} (v \eta_i(w)) + \{ \} ,$$

so ist die formale Entwicklung von h_n gezeigt.

Die Beschränktheit des Restglieds folgt aus der von $\alpha_{p-j-i, n, \Omega}$ und $\eta_{p-j, n}$, sowie der Stetigkeit von v .

Es ist also noch die Symmetrie der Bilinearformen H_j zu zeigen.

Da nach Voraussetzung h_n symmetrisch ist, hat man für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} 0 &= h_n(r_n v, r_n w) - h_n(r_n w, r_n v) \\ &= \sum_{j=0}^{p-k-1-1} [H_j(v, w) - H_j(w, v)] \left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{p-k-1} [H_{k+1, n}(v, w) - H_{k+1, n}(w, v)] . \end{aligned}$$

Da $H_{k+1, n}$ gleichmäßig bezüglich n beschränkt ist, erhält man durch Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$:

$$0 = H_0(v, w) - H_0(w, v)$$

und somit die Behauptung für $j = 0$. Durch Induktion ergibt sich dann die Symmetrie der anderen Bilinearformen.

(3.3.4) Korollar

Ist $\eta_j = 0$ für ungerades j , so ist die Entwicklung von h_n quadratisch.

Beweis : Folgt sofort aus (3.3.2) und $\beta_i = 0$ für ungerades i .

Diese Beweistechnik läßt sich nicht direkt auf Funktionen mit Singularitäten übertragen. Für Bilinearformen, die den zusätzlichen Forderungen (3.2.2-4) genügen, ist dies jedoch möglich. Die betrachteten Funktionen sollen in einer Umgebung der 0 eine Darstellung als Linearkombination von singulären Anteilen wie in (2.3.8), sowie einen hinreichend glatten Anteil besitzen:

$$(3.3.5) \quad u|_{U_0} = \sum_{i \in I_u} \mathbb{P}_i(u) + u^*.$$

Dabei bedeuten:

$I_u \subset \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0$ endlich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(u)(x,y) &= r^{i_1} (\log r)^{i_2} \varphi_i(\theta) \text{ falls } i = (i_1, i_2) \in I_u \\ &\varphi \text{ analytisch in einer Umgebung von } [0, \alpha\pi] \\ \varphi(0) &= \varphi(\alpha\pi) = 0. \end{aligned}$$

Für $i \notin I_u$ definiert man zweckmäßigerweise $\mathbb{P}_i(u) = 0$.

Wir nehmen hier o.E.d.A. an, daß die Schenkel des Innenwinkels $\theta = \alpha\pi$ bei 0 durch die Halbgeraden $(r, 0)$ und $(r \cos(\alpha\pi), r \sin(\alpha\pi))$ ($r > 0$) gebildet werden.

Der Rest $u^* \in C_{p+\sigma_h}(\overline{\Omega})$ besitze die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \bigwedge_{0 \leq k+j \leq p+\sigma_h} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k u^*(x,y) &= O(r^{\gamma^*(u)-k-j}) \text{ für } r \rightarrow 0 \\ &\text{mit } \gamma^*(u) > p + \sigma_h. \end{aligned}$$

u^* verschwindet also mit allen Ableitungen bis zur Ordnung $p+\sigma_h$ im Nullpunkt.

Seien nun $u, v \in C_{p+\sigma_h}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ mit einer Darstellung der Form

(3.3.5) gegeben. Für die glatten Anteile u^* und v^* gelte:

$$(3.3.6) \quad \begin{aligned} \gamma^*(u) &> p + \sigma_h - s(v) - 2, \quad \gamma^*(v) > p + \sigma_h - s(u) - 2 \\ &\text{mit } s(w) := \min\{i_1 \mid (i_1, i_2) \in I_w\}. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt dann folgender

(3.3.7) Satz :

Die Bilinearform h_n erfülle die zusätzlichen Forderungen (3.2.2-4). Dann besitzt h_n eine asymptotische Entwicklung

$$\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq k}$$

$$h_n(r_n u, r_n v) = \sum_{j=0}^{p-1} H_j(u, v) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{p_{H_0, n}} (u, v) + \sum_{i \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0} H_i(u, v) \left(\frac{1}{n}\right)^{i_1} (\log \frac{1}{n})^{i_2}$$

Die Koeffizienten besitzen eine Darstellung der Form

$$(3.3.8) \quad H_j(u, v) = r^{-1} \sum_{\mu=0}^j \theta_{\mu}(u \eta_{j-\mu}(v))$$

$$(3.3.9) \quad H_i(u, v) = \sum_{k \in I_u} \sum_{l \in I_v} H_{i_2}^*(\mathbb{P}_k(u), \mathbb{P}_l(v))$$

$$k_1 + l_1 = i_1 + \sigma_h - 2$$

d.h. H_i verschwindet bis auf endlich viele Indizes und hängt nur von den Singularitäten von u bzw. v in U_0 ab.

Das Restglied besitzt eine Abschätzung

$$(3.3.10) \quad |H_{0, n}(u, v)| \leq C_0(u, v) \left(\frac{1}{n}\right)^{-\epsilon} \text{ für } \epsilon > 0 \text{ beliebig.}$$

Beweis :

Der Einfachheit halber wird der Beweis des Satzes nur für elementige Indexmengen I_u und I_v geführt. Die Verallgemeinerung ergibt sich dann durch Summation.

Sei also $I_u = \{(\beta, m)\}$, $I_v = \{(\gamma, q)\}$ und

$$\begin{aligned} (3.3.11) \quad u_\mu(x, y) &:= \mathfrak{P}_{(\beta, m)}(u)(x, y) \log r^{\mu-m} = r^\beta \log r^\mu \varphi_u(\theta) \\ v_\nu(x, y) &:= \mathfrak{P}_{(\gamma, q)}(v)(x, y) \log r^{\nu-q} = r^\gamma \log r^\nu \varphi_v(\theta) \\ &(\text{definiert f\"ur } (x, y) \in K_\alpha, \mu = 0, \dots, m, \nu = 0, \dots, q). \end{aligned}$$

Aus (3.1.6) erhält man für h_n

$$\begin{aligned} (3.3.12) \quad h_n(r_n u, r_n v) &= \sum_{P \in \hat{\Omega}_n} u(P) h_n^*(r_n v)(P) \\ &= \frac{n^2}{\tau} \sum_{l=1}^M Q_{nT_0} (u h_n^*(r_n v) \circ \psi_l) \end{aligned}$$

mit der Trapezregel gemäß Beispiel (2.2.2b).

Wegen $u, v \in C_{p+\sigma_h}(\overline{\Omega \setminus U_0})$ läßt sich der Beweis von (3.3.1) direkt übertragen. Dies ergibt :

$$\begin{aligned} (3.3.13) \quad \frac{n^2}{\tau} \sum_{l=M_0+1}^M Q_{nT_0} (u h_n^*(r_n v) \circ \psi_l) &= \sum_{j=0}^{p-1} \left[\sum_{i=0}^j \theta_{i, \Omega \setminus U_0} (u \eta_{j-i}(v)) \right] \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{n} \right)^j \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} \right)^p H_{0, n, \Omega \setminus U_0}(u, v) \end{aligned}$$

mit beschränktem (bzgl. n) Rest.

Aus der Darstellung (3.3.5) für u und v ergibt sich in U_0 folgende Zerlegung :

$$\begin{aligned} (3.3.14) \quad u h_n^*(r_n v) &= u^* h_n^*(r_n v^*) + u^* h_n^*(r_n v_q) \\ &\quad + u_m h_n^*(r_n v^*) + u_m h_n^*(r_n v_q) \end{aligned}$$

Auf den ersten Anteil läßt sich erneut die Argumentation wie bei (3.3.1) anwenden , da nach Voraussetzung die glatten Anteile u^*, v^* in $C_{p+\sigma_h}(\overline{U_0})$ liegen.

Dies ergibt :

$$(3.3.15) \quad \frac{n}{\tau} \sum_{l=1}^M Q_{nT_0}(u^* h_n^*(r_n v^*) \bullet \psi_1) = \sum_{j=0}^{p-1} \left[\sum_{i=0}^j \beta_{i,U_0}(u^* \eta_{j-i}(v^*)) \right] \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{n} \right)^j + \left(\frac{1}{n} \right)^p H_{Q,n,U_0}(u^*, v^*) .$$

Für den nächsten Anteil wähle man zunächst ein $k' \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft :

$$(3.3.16) \quad \bigwedge_{1 \leq l \leq M_0} \bigwedge_{k' \leq i \leq n} P = \psi_1 \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \in U_0 \quad \bigwedge_{Q \in V_h} P + \frac{1}{n} Q \neq 0 .$$

Auf $h_n^*(r_n v_q)(P)$ kann dann die lokale Entwicklung (3.2.7) im Punkt P angewandt werden , da diese nur von der Differenzierbarkeit von v_q in einer Umgebung von P abhängt. Die Abschätzung des Restglieds hängt dann jedoch von der Umgebung ab. Daher gilt :

$$(3.3.17) \quad h_n^*(r_n v_q)(P) = \sum_{j=0}^{p-1} \eta_j(v_q)(P) \left(\frac{1}{n} \right)^{j+2} + \left(\frac{1}{n} \right)^{p+2} \eta_{pn}(v_q)(P) \\ \text{mit } \eta_{pn}(r_n v_q)(P) = O(|P|^{Y-\sigma_h-P} |\log(|P|)|^q) \text{ für } |P| \rightarrow 0 .$$

Dies setzt man in die Trapezregel für T_1 ein und erhält :

$$(3.3.18) \quad \frac{n}{\tau} Q_{nT_0}(u^* h_n^*(r_n v_q) \bullet \psi_1) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\tau} Q_{nT_0}(u^* \eta_j(v_q) \bullet \psi_1) \left(\frac{1}{n} \right)^j + \left\{ \sum_{i=1}^{k'-1} \sum_{j=0}^i [u^* h_n^*(r_n v_q) - \sum_{j=0}^{p-1} u^* \eta_j(v_q) \left(\frac{1}{n} \right)^{j+2}] (\psi_1 \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right)) + \left(\frac{1}{n} \right)^{p+2} \left[\sum_{i=k'}^n \sum_{j=0}^i u^* \eta_{pn}(v_q) (\psi_1 \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right)) - \frac{1}{12} u^* \eta_{pn}(v_q) (\psi_1(1,0)) - \frac{1}{12} u^* \eta_{pn}(v_q) (\psi_1(1,1)) \right] \right\} \\ = \sum_{j=0}^{p-1} \left[\sum_{i=0}^j \beta_{i,T_1}(u^* \eta_{j-i}(v_q)) \right] \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{n} \right)^j + O \left(\left(\frac{1}{n} \right)^p \right) .$$

Denn wegen der Voraussetzung (3.3.6) ist $u^* \eta_j(v_q) \in C_{p-j}(\overline{T}_1)$ und der Anteil in den geschweiften Klammern verhält sich wie $O((\frac{1}{n})^p)$.

Analog erhält man für den dritten Anteil in (3.3.14) :

$$(3.3.19) \quad \frac{n^2}{\tau} Q_{nT_0}(u_m h_n^*(r_n v^*) \cdot \psi_1) = \sum_{j=0}^{p-1} \left[\sum_{i=0}^j \mathfrak{R}_{i,T_1}(u_m \eta_{j-i}(v^*)) \right] \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{n}\right)^j + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right).$$

Es bleibt also noch der Anteil mit u_m und v_q in (3.3.14).

Dazu sei $R > 0$ so gewählt, daß

$$(3.3.20) \quad \bigwedge_{\substack{Q \in \mathbb{R}^2 \\ |Q| < R}} \bigwedge_{0 \leq \mu \leq q} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} |D_Q^j v_\mu(P)| < \infty$$

gleichmäßig für $\bar{P} \in K_\alpha$ mit $|\bar{P}| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (3.3.21) \quad v_q(P + \frac{1}{n}Q) &= \sum_{\mu=0}^{F2} \sum_{\mu=0}^q \binom{q}{\mu} |P|^Y (\log |P|)^{q-\mu} v_\mu(|P|^{-1}P + \frac{1}{n|P|}Q) \\ &= \sum_{\mu=0}^q \binom{q}{\mu} |P|^Y (\log |P|)^{q-\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{n|P|}\right)^j D_Q^j v_\mu(|P|^{-1}P) \\ &= \sum_{j=0}^{F2} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{n}\right)^j D_Q^j v_q(P) \end{aligned}$$

falls $(n|P|)^{-1}|Q| < R$.

Sei daher $k \geq k'$ so gewählt, daß gilt

$$(3.3.22) \quad \bigwedge_{n \geq k} \bigwedge_{1 \leq l \leq M_0} \bigwedge_{i \geq k} \bigwedge_{0 \leq j \leq i} |\psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})_n| > \frac{|Q|}{R}.$$

Damit ist dann für $P = \psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \in U_0$ mit $i \geq k$:

$$(3.3.23) \quad h_n^*(r_n v_q)(P) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(v_q)(P) \left(\frac{1}{n}\right)^{j+2}.$$

Es sei nun $1 \leq l \leq M_0$ fest. Die Trapezsumme mit Funktionswerten aus T_1 wird wie folgt zerlegt :

$$\begin{aligned}
 (3.3.24) \quad & \frac{n^2}{\tau} Q_{n, T_0} (u_m h_n^* (r_n v_q) \circ \psi_1) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^i [u_m (\psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})) \sum_{Q \in V_h} \Phi_h(Q) v_q (\psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})) + \frac{1}{n} Q] (\frac{1}{n})^{2-\sigma_h} \\
 &+ \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^i u_m h_n^* (r_n v_q) (\psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})) \\
 &- \frac{1}{12} u_m h_n^* (r_n v_q) (\psi_1(1, 0)) - \frac{1}{12} u_m h_n^* (r_n v_q) (\psi_1(1, 1)) .
 \end{aligned}$$

Für den Ausdruck in den eckigen Klammern erhält man mit

$$P_\alpha := n \psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = \psi_1(i, j) \in K_\alpha$$

$$\begin{aligned}
 (3.3.25) \quad [] &= (\frac{1}{n})^{\beta+\gamma-\sigma_h+2} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (\log \frac{1}{n})^v u_{m-v}(P_\alpha) \times \\
 &\times \sum_{\mu=0}^q \binom{q}{\mu} (\log \frac{1}{n})^\mu \sum_{Q \in V_h} \Phi_h(Q) v_{q-\mu}(P_\alpha + Q) \\
 &= (\frac{1}{n})^{\beta+\gamma-\sigma_h+2} \sum_{i=0}^{m+q} (\log \frac{1}{n})^i \times \\
 &\times \sum_{\mu=0}^i \binom{q}{\mu} \binom{m}{i-\mu} u_{m-i+\mu}(P_\alpha) \sum_{Q \in V_h} \Phi_h(Q) v_{q-\mu}(P_\alpha) .
 \end{aligned}$$

Für die Funktionswerte an den Stellen $\psi_1(1, 0)$ und $\psi_1(1, 1)$ läßt sich die lokale Entwicklung von h_n^* ausnützen. Das Restglied verhält sich hier wie $O((\frac{1}{n})^P)$. Es ist also nur noch der mittlere Anteil in (3.3.24) zu entwickeln. Da dort nur Punkte $P = \psi_1(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ mit $i \geq k$ auftreten, läßt sich auf jeden Funktionswert (3.3.23) anwenden. Es treten dann Trapezsummen von $u_m \tau_v(v_q)$ für $v \geq 0$ auf. Nun nützt man die spezielle Darstellung von τ_v nach Lemma (3.2.6) aus.

Für $(x, y) \in T_0$ erhält man hieraus

$$(3.3.26) \quad u_m \eta_v(v_q) \cdot \psi_1(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m+q} r^{\beta+\gamma-\sigma_h} v^{-\nu} (\log r)^{\mu} \varphi_{\mu\nu}^{(1)}(\theta) \\ =: \sum_{\mu=0}^{m+q} w_{\mu\nu}^{(1)}(x, y)$$

mit geeigneten Funktionen $\varphi_{\mu\nu}^{(1)}$.

Auf die Summe mit den Funktionswerten $w_{\mu\nu}^{(1)}(\frac{1}{n}, \frac{j}{n})$ wird nun Satz (2.3.8) mit p ersetzt durch

$$p(v) = \begin{cases} p - v & \text{falls } v \leq p - 1 \\ 1 & \text{falls } v \geq p \end{cases}$$

angewandt. Bezeichnet man diese Summe mit s_1 , so hat man:

$$(3.3.27) \quad s_1 = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m+q} \left\{ \sum_{j=0}^{p(v)-1} \theta_j(w_{\mu\nu}^{(1)}) \left(\frac{1}{n}\right)^j + \left(\frac{1}{n}\right)^{p(v)} R_{p(v), n}(w_{\mu\nu}^{(1)}) \right. \\ + \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta+\gamma-\sigma_h+2} \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} (\log \frac{1}{n})^i [S_{p(v), k}(w_{\mu\nu}^{(1)} (\log r)^{-i}) \\ \left. - (\log \frac{1}{n})^{\frac{1}{i+1}} L_{p(v)}(w_{\mu\nu}^{(1)} (\log r)^{-i})] \right\} \left(\frac{1}{n}\right)^v.$$

Damit nun nach Potenzen von $(\frac{1}{n})$ sortiert werden kann, muß zuerst die absolute Konvergenz der einzelnen Summanden in den geschweiften Klammern gezeigt werden. Sei hierzu $v \geq v_0 = \max\{p, \beta+\gamma-\sigma_h+2\}$ und $(x, y) = \psi_1(\xi, \eta) \in T_{1, \infty} := \psi_1(\{(\xi, \eta) \mid 1 \leq \xi, 0 \leq \eta \leq \xi\})$. Dann ist wegen $|\psi_1(\xi, \eta)n| > |Q|/R$ nach (3.3.23) die Reihe

$$\sum_{v=v_0}^{\infty} \eta_v(v_q)(x, y) \left(\frac{1}{n}\right)^v$$

in $T_{1, \infty}$ absolut und gleichmäßig konvergent und besitzt dort den Wert (Taylorrestglied):

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\nu_0} \sum_{Q \in V_h} \mathfrak{F}_h(Q) \frac{1}{(\nu_0 - 1)!} \int_0^1 (1-s)^{\nu_0 - 1} (D_{Q^0}^{\nu_0})_{v_q}((x, y) + \frac{s}{n} Q) ds$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{\nu_0} O(r^{\gamma - \sigma} h^{-\nu_0} (\log r^q)) \quad (\text{gleichmäßig bzgl. } n \text{ für } r \rightarrow \infty).$$

Damit verhält sich der Term $\sum_{v=p}^{\infty} \mathfrak{B}_0(w_{\mu\nu}^{(1)}) \left(\frac{1}{n}\right)^{\nu}$ wie $O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right)$.

Ebenso zeigt man $\sum_{v=p}^{\infty} \mathfrak{B}_{1n}(w_{\mu\nu}^{(1)}) \left(\frac{1}{n}\right)^{\nu} = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\right)$.

Da außerdem $L_1(w_{\mu\nu}^{(1)} (\log r)^{-i})$ für fast alle ν verschwindet, ist die absolute Konvergenz der einzelnen Terme gesichert.

Berücksichtigt man noch die Tatsache, daß die Darstellung von $\mathfrak{B}_i(w_{\mu\nu}^{(1)})$ und $\mathfrak{B}_{i,n}(w_{\mu\nu}^{(1)})$ unabhängig von μ ist, so kann man die Summe über die Indizes μ zusammenfassen und erhält:

$$\begin{aligned} (3.3.28) \quad s_1 &= \sum_{j=0}^{p-1} \left[\sum_{i=0}^j \mathfrak{B}_i(u_m \eta_{j-i}(v_q) \bullet \psi_1) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &+ \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta + \gamma - \sigma_h + 2} \sum_{i=0}^{m+q+1} \left(\log \frac{1}{n}\right)^i \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m+q} \\ &\left\{ \binom{\mu}{i} S_{p(v),k}(w_{\mu\nu}^{(1)} (\log r)^{-i}) + \binom{\mu}{i-1} \frac{1}{i} L_{p(v)}(w_{\mu\nu}^{(1)} (\log r)^{1-i}) \right\} \end{aligned}$$

mit der Festsetzung $\binom{\mu}{-1} = 0$.

Nun werden alle Entwicklungen der Anteile in (3.3.14) zusammengefaßt und mit (3.3.13) ergibt dies genau die Behauptung des Satzes.

Im nächsten Kapitel werden mit den Bilinearformen , die in der Entwicklung von h_n auftreten , Variationsaufgaben formuliert und gelöst. Es sollen daher die Darstellungen dieser Koeffizienten in Spezialfällen angegeben und verbessert werden. Bezeichnet man mit $\mathbb{P}_+(u)$ den Anteil in der Entwicklung einer Funktion gemäß (3.3.5), der integrierbar in U_0 ist , und mit $\mathbb{P}_-(u)$ alle Terme die sich wie $O(r^\beta)$ mit $\beta < -2$ verhalten , so erhält man aus der Definition von $\mathbb{B}_j$

$$(3.3.29) \quad \mathbb{B}_0(u\eta_j(v)) = \iint_{U_0} \mathbb{P}_+(u\eta_j(v)) dx dy - \iint_{K_\alpha \setminus U_0} \mathbb{P}_-(u\eta_j(v)) dx dy \\ + \iint_{\Omega \setminus U_0} u\eta_j(v) dx dy .$$

Ist $u\eta_j(v)$ integrierbar , so ist $\mathbb{P}_-(u\eta_j(v)) = 0$ und es ist

$$\mathbb{B}_0(u\eta_j(v)) = \iint_{\Omega} u\eta_j(v) dx dy .$$

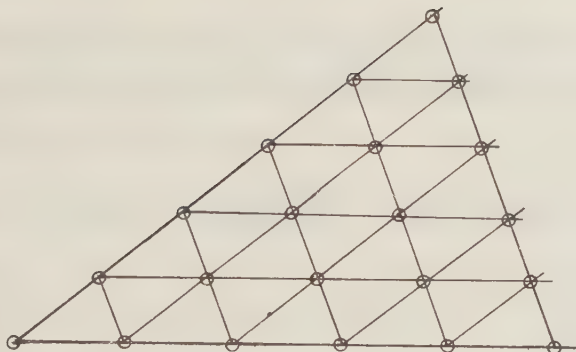
Dies ist zum Beispiel der Fall , wenn eine der beiden Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ ist.

Aus (3.3.29) läßt sich sofort die Darstellung für H_0 ablesen.

Einige Berechnungen sind nun für die singulären Anteile H_1^* notwendig , bis sie in einer brauchbaren Form vorliegen. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein .

$$(3.3.30) \quad K_{\alpha,d} := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} \vee & \vee & \vee \\ 1 \leq l \leq M_0 & 0 \leq i & 0 \leq j \leq i \end{matrix} P = \psi_1(i,j)\} \\ (\text{Gitterpunkte in } K_\alpha)$$

Wie bei (3.1.1) werden $\dot{K}_{\alpha,d}$ und $\partial K_{\alpha,d}$ erklärt.



(3.3.31) Beispiel (l=1)

Für $\varphi : K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}$ erklären wir den durch h_n^* induzierten Differenzenoperator

$$(3.3.32) \quad H\varphi : \dot{K}_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H\varphi(P) := \sum_{Q \in V_h} \tilde{\varphi}_h(Q) \varphi(P + Q)$$

Ist $\varphi : K_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ analytisch in einer geeigneten Umgebung von $P \in \dot{K}_{\alpha,d}$, so gilt :

$$(3.3.33) \quad H\varphi(P) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(\varphi)(P), \text{ d.h. } H = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j.$$

Diese Bedingung ist insbesondere von v_{μ} erfüllt, falls

$P = \psi_1(i,j)$ mit $i \geq k$. Dann ist für beliebiges $Q \in V_h$

$$v_{\mu}(P + Q) = \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} |P|^v (\log |P|)^{\mu-v} v_v(|P|^{-1} |P| + |P|^{-1} Q).$$

Wegen der Wahl von k in (3.3.22) ist $|Q|/|P| < R$. Mit denselben

Umformungen wie in (3.3.21) ergibt sich dann obige Behauptung.

Für Funktionen $\varphi, \psi : K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}$ wird noch ein Skalarprodukt erklärt :

$$(3.3.34) \quad [\varphi, \psi] := \sum_{P \in K_{\alpha,d}} \varphi(P) \psi(P) \text{ falls existent.}$$

Als erstes wird nun $w_{\mu\nu}^{(1)}$ durch u_μ und v_q geeignet dargestellt.

Durch kurze elementare Rechnung erhält man für $(x, y) = \psi_1(\xi, \eta)$

und $w := \beta + \gamma - \sigma_h$

$$\begin{aligned}
 (3.3.35) \quad \sum_{\mu=0}^{m+q} \binom{\mu}{i} (w_{\mu\nu}^{(1)} \log r^{-i})(\xi, \eta) &= \sum_{\mu=0}^{m+q} \binom{\mu}{i} \mathbb{T}_{(w-\nu, \mu)}(u_\mu \eta_\nu v_q)(x, y) \log r^{-i} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{m+q} \frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dt} \right)^i \left\{ \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} t^j (\log r)^{\mu-j} \mathbb{T}_{(w-\nu, \mu)}(u_\mu \eta_\nu v_q)(x, y) \log r^{-\mu} \right\}_{t=0} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{m+q} \frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dt} \right)^i \{ (\log(re^t))^{\mu} \mathbb{T}_{(w-\nu, \mu)}(u_\mu \eta_\nu v_q)(x, y) \log r^{-\mu} \}_{t=0} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{m+q} \frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dt} \right)^i \{ \mathbb{T}_{(w-\nu, \mu)}(u_\mu \eta_\nu v_q)(e^t x, e^t y) e^{-(w-\nu)t} \}_{t=0} \\
 &= \frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dt} \right)^i \{ u_\mu (e^t x, e^t y) \eta_\nu (v_q (e^t x, e^t y)) e^{-(\beta+\gamma)t} \}_{t=0} \\
 &= \frac{1}{i!} \left(\frac{d}{dt} \right)^i \left\{ \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} t^\mu u_{m-\mu}(x, y) \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} t^j \eta_\nu (v_{q-j})(x, y) \right\}_{t=0} \\
 &= \sum_{\mu=0}^i \binom{q}{\mu} \binom{m}{i-\mu} u_{m-i+\mu}(x, y) \eta_\nu (v_{q-\mu})(x, y) .
 \end{aligned}$$

Eine derartige Summe tritt auch in dem zu H_1^* gehörenden Anteil (3.3.25) auf. Addiert man hierzu den nach (3.3.35) umgeformten Anteil aus (3.3.27), so ergibt dies für H_1^* folgende Darstellung :

$$\begin{aligned}
 (3.3.36) \quad H_1^*(u_m, v_q) &= \sum_{\mu=0}^i \binom{q}{\mu} \binom{m}{i-\mu} \sum_{l=1}^M \left\{ \sum_{\xi=1}^{k-1} \sum_{\eta=0}^{\xi} u_{m-i+\mu} H_{v_{q-\mu}}(\psi_1(\xi, \eta)) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{p(\nu), k}(u_{m-i+\mu} \eta_\nu v_{q-\mu} \cdot \psi_1) \right\} \\
 &\quad + \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{q}{\mu} \binom{m}{i-1-\mu} \sum_{l=1}^M \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{l} L_p(\nu) (u_{m-i+1+\mu} \eta_\nu v_{q-\mu} \cdot \psi_1) .
 \end{aligned}$$

Es soll hier noch erwähnt werden, daß sich die in (3.3.36) auftretenden Reihen in endliche Summen umrechnen lassen.

Setzt man zur Abkürzung

$$F_j(w)(x) := \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \overline{B}_i(0) \overline{B}_{j-i}(0) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-i} w(x,y) dy,$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (3.3.33) für den Ausdruck in den geschweiften Klammern

$$(3.3.37) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\xi=1}^s \sum_{\eta=0}^{\xi} u_{m-i+\mu} H_{\nu} v_{q-\mu} (\psi_1(\xi, \eta)) \right. \\ \left. - \sum_{0 \leq \nu+j \leq m+2} \int_0^s F_j(u_{m-i+\mu} \eta_{\nu} v_{q-\mu} \psi_1)(x) dx \right\},$$

da die Integrale für $\nu + j > m + 2$ verschwinden.

Da außerdem in der Reihe mit den Termen L_p alle Glieder mit $\nu > p$ verschwinden (siehe Definition (2.3.11) von L_p), ist jede der Reihen durch eine endliche Summe ersetzt.

Wir wollen nun noch einige Spezialfälle angeben, in denen die Darstellung von H_i^* besonders einfach ist.

$$(3.3.38) \quad H_i^*(u_m, v_q) = \sum_{\mu=0}^i \binom{q}{\mu} \binom{m}{i-\mu} [u_{m-i+\mu}, H_{\nu} v_{q-\mu}] \quad \text{falls } m < -2.$$

In diesem Fall verschwinden alle Integrale in (3.3.37) sowie alle Anteile mit L_p

$$(3.3.39) \quad H_i^*(u_m, v_q) = 0 \quad \text{falls } q + m < i.$$

$$(3.3.40) \quad H_0^*(u_m, v_q) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{P \in K_{\alpha, d} \cap G_s} u_m H_{\nu} v_q(P) - \frac{1}{\pi} \int_{G_s} u_m \eta_0 v_q dx dy \right\}$$

für $m = -2$, $G_s := \bigcup_{l=1}^{M_0} \psi_l(\{(x,y) | 1 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq x\})$.

3.4 Bilinearformen mit Gitterfunktionen

Für Gitterfunktionen $\varphi : K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf dem Rand von $K_{\alpha,d}$ verschwinden, läßt sich in kanonischer Weise eine "Interpolierende in D_n " erklären. Sie soll der Einfachheit halber wieder mit $r_n \varphi$ bezeichnet werden.

(3.4.1) Definition

Sei $\varphi : K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi|_{K_{\alpha,d}} \equiv 0$. Dann ist durch

$$r_n \varphi := \sum_{P \in \Omega_n \cap \bar{U}_0} \varphi(nP) b_P^{(n)} \in D_n$$

eine Interpolierende definiert. Dabei ist $b_P^{(n)}$ die zum Punkt $P \in \Omega_n$ gehörende Lagrangefunktion.

Für die Anwendungen in Kapitel 4 ist es nützlich, das Verhalten von $h_n(r_n u, r_n \varphi)$ bzw. $h_n(r_n \varphi, r_n \psi)$ mit u wie in Satz (3.3.7) und φ, ψ wie oben zu bestimmen. Dabei werden für h_n stets die zusätzlichen Bedingungen (3.2.2-4) vorausgesetzt. Es ist allerdings notwendig, Wachstumsbedingungen an φ oder $H\varphi$ zu stellen, d.h. entweder

$$(3.4.2) \quad \varphi(p) = O(|P|^{s(\varphi)}) \quad \text{für } |P| \rightarrow \infty$$

oder

$$(3.4.3) \quad H\varphi(P) = O(|P|^{s(\varphi) - \sigma_h}) \quad \text{für } |P| \rightarrow \infty.$$

Man überlegt sich leicht, daß im Fall $\varphi(P) = |P|^B g(\theta)$ (3.4.2) und (3.4.3) gleichzeitig erfüllt sind. In der Regel sind jedoch die beiden Voraussetzungen unabhängig voneinander.

(3.4.4) Lemma

φ erfülle die Bedingung (3.4.2) mit $s(\varphi) < \sigma_h - 2 - i_1$ für $i \in I_u$. Dann ist

$$\begin{aligned} h_n(r_n \varphi, r_n u) &= \left\{ \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} \varphi(nP) h_n^*(r_n u^*)(P) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} \right)^{2-\sigma_h} \sum_{i \in I_u} \sum_{P \in K_{\alpha, d, n}} \varphi(P) \sum_{Q \in V_h} \Phi_h(Q) \mathfrak{P}_i(u) \left(\frac{1}{n} P + \frac{1}{n} Q \right) \Big\} \\ &\quad + \sum_{i \in I_u} \sum_{\mu=0}^{i_2} \binom{i_2}{\mu} \left(\frac{1}{n} \right)^{2-\sigma_h+i_1} (\log \frac{1}{n})^\mu [\varphi, H(\mathfrak{P}_i(u) \log r^{-\mu})] \end{aligned}$$

mit $K_{\alpha, d, n} := K_{\alpha, d} \setminus n(\Omega_n \cap \overline{U}_0)$.

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern verhält sich wie $O((\frac{1}{n})^{\min\{\gamma^*(u) - \sigma_h + 2, -s(\varphi)\} - \epsilon})$, $\epsilon > 0$ beliebig.

Beweis :

$$\begin{aligned} h_n(r_n \varphi, r_n u) &= \sum_{i \in I_u} \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} \varphi(nP) h_n^*(r_n \mathfrak{P}_i(u))(P) \\ &\quad + \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} \varphi(nP) h_n^*(r_n u^*)(P) \end{aligned}$$

Sei $i = (\beta, m) \in I_u$ fest und $u_m := \mathfrak{P}_i(u)$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} \varphi(nP) h_n^*(r_n u_m)(P) \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^{2-\sigma_h+\beta} \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} (\log \frac{1}{n})^\mu \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} \varphi(nP) \sum_{Q \in V_h} \Phi_h(Q) u_{m-\mu}(nP + Q) \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^{2-\sigma_h+\beta} \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} (\log \frac{1}{n})^\mu \{ [\varphi, H u_{m-\mu}] - \sum_{P \in K_{\alpha, d, n}} \varphi(P) H u_{m-\mu}(P) \} , \end{aligned}$$

denn die Reihe $\sum_{P \in K_{\alpha, d}} |\varphi(P)| |H u_{m-\mu}(P)| \leq C(\varphi, u) \sum_{P \in K_{\alpha, d}} |P|^{s(\varphi)+\beta-\sigma_h+\epsilon}$

ist für beliebiges $0 < \epsilon < \sigma_h - s(\varphi) - \beta - 2$ nach Voraussetzung absolut konvergent.

Für die Summe über $K_{\alpha,d,n}$ gilt folgende Abschätzung :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h+\beta} \sum_{P \in K_{\alpha,d,n}} |\varphi(P)| |Hu_{m-\mu}(P)| \leq C'(\varphi, u) \left(\frac{1}{n}\right)^{-s(\varphi)-\epsilon}.$$

Für den zweiten Anteil in den geschweiften Klammern erhält man mit Satz (2.3.8) :

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} |\varphi(nP) h_n^*(r_n u^*)(P)| &\leq C''(\varphi, u^*) \left(\frac{1}{n}\right)^{2-s(\varphi)} \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} |P|^{s(\varphi)+\gamma^*(u)-\sigma_h} \\ &= O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma^*(u)+2-\sigma_h-\epsilon}\right) + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{-s(\varphi)}\right). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen der einzelnen Terme erhält man genau die Behauptung.

(3.4.5) Lemma

φ erfülle die Voraussetzung (3.4.3) mit $s(\varphi)$ wie in Lemma (3.4.4). Dann ist

$$\begin{aligned} h_n(r_n u, r_n \varphi) &= \left\{ \sum_{P \in \Omega_n \cap \overline{U}_0} u^*(P) H\varphi(nP) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h} \sum_{i \in I_u} \sum_{P \in K_{\alpha,d,n}} \mathfrak{P}_i(u) \left(\frac{1}{n} P\right) H\varphi(P) \} \\ &\quad + \sum_{i \in I_u} \sum_{\mu=0}^i \binom{i}{\mu} \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h+i-1} (\log \frac{1}{n})^\mu [\mathfrak{P}_i(u) \log r^{-\mu}, H\varphi] \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern verhält sich wie $O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\min\{-s(\varphi), \gamma^*(u)+2-\sigma_h\}-\epsilon}\right)$, $\epsilon > 0$ beliebig.

Beweis : wie bei Lemma (3.4.4).

Aus den beiden Aussagen ergibt sich mit dem üblichen Symmetrieargument, daß $[\varphi, Hu_m] = [u_m, H\varphi]$ falls $s(\varphi) + \beta < \sigma_h - 2$. In diesem Fall existieren beide Skalarprodukte.

Für zwei Gitterfunktionen φ, ψ läßt sich dann folgende Aussage beweisen :

(3.4.6) Lemma

φ erfülle die Bedingung (3.4.2) und ψ die Bedingung (3.4.3) mit $s(\varphi) + s(\psi) < \sigma_h - 2$. Dann gilt

$$h_n(r_n\varphi, r_n\psi) = \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h} [\varphi, H\psi] - \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\sigma_h} \sum_{P \in K_{\alpha, d, n}} \varphi(P) H\psi(P) \right\}$$

Der Term in den geschweiften Klammern verhält sich wie $O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{-s(\varphi)-s(\psi)}\right)$.

Beweis : wie in Lemma (3.4.4) .

Aus der Symmetrie von h_n erhält man sofort wieder die Symmetrie der Bilinearform $[\cdot, H\cdot]$, falls $s(\varphi) + s(\psi) < \sigma_h - 2$. Dies gilt natürlich auch für die gemeinsamen Faktoren von $\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} (\log \frac{1}{n})^{\mu}$ in der Entwicklung von Satz (3.3.7). Dies ist um so bemerkenswerter , als sich die Behauptung nur durch langwierige Berechnungen direkt aus den Definitionen der Koeffizienten herleiten läßt. Durch die Tatsache , daß sie in der Entwicklung einer symmetrischen Bilinearform auftreten , ist dies jedoch trivial.

Damit sollen die recht allgemeinen Betrachtungen über Bilinearformen abgeschlossen werden. Wir wollen nun im nächsten Abschnitt einige Beispiele aus der Methode der finiten Elemente angeben , die insbesondere die Bedingungen (3.2.2-4) erfüllen.

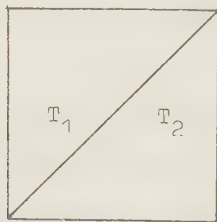
3.5 Bilinearformen in der Methode der finiten Elemente

Die in den zweidimensionalen Summenformeln von Kapitel 2 auftretenden Punkte lassen sich als Eckpunkte von Dreiecken auffassen, die das Gebiet Ω zerlegen. Derartige Triangulierungen findet man häufig in der Methode der finiten Elemente, wo die Lösungen gewisser Probleme (z.B. elliptische Differentialgleichungen) durch Funktionen approximiert werden, die sich in den finiten Elementen (hier Dreiecke) als Polynome darstellen lassen. Wir wollen uns hier auf den Fall stückweise linearer (d.h. auf jedem Teildreieck) Ansatzfunktionen beschränken.

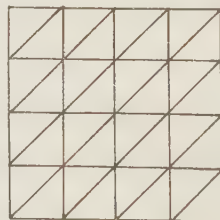
Sei $\mathfrak{T} = \{T_i\}_{1 \leq i \leq M}$ eine zulässige Triangulierung von Ω und

$$(3.5.1) \quad \mathfrak{T}_n = \{T_i^{(n)}\}_{1 \leq i \leq M n^2}$$

diejenige zulässige Zerlegung von Ω (Verfeinerung!), deren Eckpunkte die Stützstellen einer Trapezregel $Q_{n\Omega}$ sind. Man erhält $\mathfrak{T}_n$, indem man in jedem Dreieck von $\mathfrak{T}$ durch seitenparallele Geraden n^2 kongruente Teildreiecke erzeugt.



Beispiel : $\mathfrak{T} = \{T_1, T_2\}$



$\mathfrak{T}_4 = \{T_1^{(4)}, \dots, T_{32}^{(4)}\}$

Als Basisfunktionen des linearen Teilraumes D_n gemäß (3.1.2) wählen wir die stückweise linearen Ansatzfunktionen, die durch die Interpolationsbedingung

$$b_i^{(n)}(Q_j^{(n)}) = \delta_{ij}$$

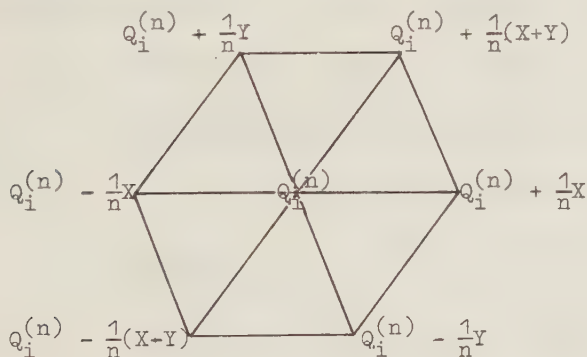
eindeutig bestimmt sind.

Der Träger von $b_i^{(n)}$ besteht also aus sechs kongruenten Dreiecken.

Die Eckpunkte dieser Dreiecke sind gegeben durch

$$Q_i^{(n)}, Q_i^{(n)} \pm \frac{1}{n}X, Q_i^{(n)} \pm \frac{1}{n}(X+Y), Q_i^{(n)} \pm \frac{1}{n}Y$$

mit $X, Y \in \mathbb{R}^2$ unabhängig von n und i .



Da D_n Teilraum des Sobolevraums $\dot{W}_2^1(\Omega)$ ist, lassen sich auf $D_n \times D_n$ folgende Bilinearformen definieren.

$$(3.5.2) \quad a_n(f, g) = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy$$

$$(3.5.3) \quad b_n(f, g) = \iint_{\Omega} f g dx dy$$

Wird in (3.5.3) die Integration näherungsweise mit einer Trapezregel durchgeführt, so erhält man

$$\begin{aligned}(3.5.4) \quad c_n(f, g) &= Q_{n, \Omega}(fg) \\ &= \tau \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{P \in \hat{\Omega}_n} f(P)g(P).\end{aligned}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Bilinearformen die zusätzlichen Voraussetzungen (3.2.2-4) erfüllen. Dazu ist es notwendig, $a_n(b_i^{(n)}, b_j^{(n)})$ (analog für b_n und c_n) zu berechnen, um so eine Darstellung für die induzierten Abbildungen zu erhalten. Man überzeugt sich leicht, daß in allen drei Fällen das Skalarprodukt verschwindet, wenn $Q_j^{(n)}$ kein Nachbarpunkt von $Q_i^{(n)}$ ist, d.h. wenn $Q_i^{(n)}$ und $Q_j^{(n)}$ in keinem gemeinsamen Dreieck von $\mathcal{T}_n$ liegen. Die (möglicherweise) nichtverschwindenden Skalarprodukte von Basisfunktionen berechnen sich zu (siehe auch Schwarz [1980] Abschnitt (2.2.2)) :

$$(3.5.5) \quad a_n(b_i^{(n)}, b_i^{(n)}) = \frac{1}{\tau} [X^T X + Y^T Y + (X+Y)^T (X+Y)]$$

$$b_n(b_i^{(n)}, b_i^{(n)}) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$c_n(b_i^{(n)}, b_i^{(n)}) = \tau \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Die Skalarprodukte $h_n(b_i^{(n)}, b_j^{(n)})$ für Nachbarpunkte $Q_i^{(n)}$ und $Q_j^{(n)}$ werden in folgender Tabelle angegeben. Man erkennt sofort, daß $h_n(b_i^{(n)}, b_i^{(n)}) = h_n(b_i^{(n)}, b_k^{(n)})$ ist, wenn $Q_j^{(n)} = Q_i^{(n)} + \frac{1}{n}Z$ und $Q_k^{(n)} = Q_i^{(n)} - \frac{1}{n}Z$ ist. Daher werden in der Tabelle diese Werte nur einmal aufgeführt.

$Q_j^{(n)}$	$Q_i^{(n)} + \frac{1}{n}X$	$Q_i^{(n)} + \frac{1}{n}(X+Y)$	$Q_i^{(n)} + \frac{1}{n}Y$
$a_n(b_i^{(n)}, b_j^{(n)})$	$-\frac{Y^T(X+Y)}{\tau}$	$\frac{X^TY}{\tau}$	$-\frac{X^T(X+Y)}{\tau}$
$b_n(b_i^{(n)}, b_j^{(n)})$	$\frac{\tau}{12} \left(\frac{1}{n}\right)^2$	$\frac{\tau}{12} \left(\frac{1}{n}\right)^2$	$\frac{\tau}{12} \left(\frac{1}{n}\right)^2$
$c_n(b_i^{(n)}, b_j^{(n)})$	0	0	0

Die induzierten Abbildungen besitzen demnach folgende Darstellungen :

$$\begin{aligned}
 (3.5.6) \quad a_n^*g(P) &= \frac{1}{\tau} g(P) [X^TX + Y^TY + (X+Y)^T(X+Y)] \\
 &\quad - Y^T(X+Y) [g(P + \frac{1}{n}X) + g(P - \frac{1}{n}X)] \\
 &\quad + X^TY [g(P + \frac{1}{n}(X+Y)) + g(P - \frac{1}{n}(X+Y))] \\
 &\quad - X^T(X+Y) [g(P + \frac{1}{n}Y) + g(P - \frac{1}{n}Y)] \\
 &= \frac{Y^T(X+Y)}{\tau} [2g(P) - g(P + \frac{1}{n}X) - g(P - \frac{1}{n}X)] \\
 &\quad + \frac{X^T(X+Y)}{\tau} [2g(P) - g(P + \frac{1}{n}Y) - g(P - \frac{1}{n}Y)] \\
 &\quad - \frac{X^TY}{\tau} [2g(P) - g(P + \frac{1}{n}(X+Y)) - g(P - \frac{1}{n}(X+Y))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.5.7) \quad b_n^*g(P) &= \frac{\tau}{12} \left(\frac{1}{n}\right)^2 [6g(P) + g(P + \frac{1}{n}) + g(P - \frac{1}{n}) \\
 &\quad + g(P + \frac{1}{n}Y) + g(P - \frac{1}{n}Y) \\
 &\quad + g(P + \frac{1}{n}(X+Y)) + g(P - \frac{1}{n}(X+Y))]
 \end{aligned}$$

$$(3.5.8) \quad c_n^*g(P) = \tau \left(\frac{1}{n}\right)^2 g(P)$$

Man definiert nun :

$$(3.5.9) \quad \sigma_a = 2$$

$$V_a = \{0, X, Y, X+Y, -X, -Y, -(X+Y)\}$$

$$\Phi_a(0) = \tau^{-1}\{X^T X + Y^T Y + (X+Y)^T (X+Y)\}$$

$$\Phi_a(X) = \Phi_a(-X) = -\tau^{-1}Y^T(X+Y)$$

$$\Phi_a(Y) = \Phi_a(-Y) = -\tau^{-1}X^T(X+Y)$$

$$\Phi_a(X+Y) = \Phi_a(-X-Y) = -\tau^{-1}X^T Y$$

$$(3.5.10) \quad \sigma_b = 0$$

$$V_b = V_a$$

$$\Phi_b(0) = \frac{\tau}{2}$$

$$\Phi_b(Q) = \frac{\tau}{12} \text{ sonst}$$

$$(3.5.11) \quad \sigma_c = 0$$

$$V_c = \{0\}$$

$$\Phi_c(0) = \tau$$

Damit erfüllen b_n und c_n die Bedingungen (3.2.2-4). Für a_n ist nur noch (3.2.3) nachzuweisen. Dies verifiziert man durch kurze elementare Rechnung.

Aus (3.2.7) kann man nun sofort die Entwicklungskoeffizienten η_j der induzierten Abbildungen berechnen. Wir bezeichnen sie mit α_j , β_j und γ_j . Alle Abbildungen besitzen eine quadratische Entwicklung, d.h. $\alpha_j = \beta_j = \gamma_j = 0$ für ungerades j .

Die Koeffizienten mit den geraden Indizes sind :

(3.5.12) zu a_n

$$\alpha_{2j}(u) = \frac{2}{\tau(2j+2)!} [-X^\tau(X+Y)D_Y^{2j+2} + X^\tau Y D_{X+Y}^{2j+2} - Y^\tau(X+Y)D_X^{2j+2}] u$$

$$\text{also } \alpha_0(u) = -\tau \Delta u$$

(3.5.13) zu b_n

$$\beta_0(u) = \tau u$$

$$\beta_{2j}(u) = \frac{\tau}{6(2j)!} [D_X^{2j} + D_Y^{2j} + D_{X+Y}^{2j}]$$

(3.5.14) zu c_n

$$\gamma_0(u) = \tau u$$

$$\gamma_j(u) = 0 \text{ für } j > 0 .$$

Somit besitzen dann die Anteile $H_0(u,v)$ in den Entwicklungen der einzelnen Bilinearformen für hinreichend glatte Funktionen die Darstellung :

$$(3.5.15) \text{ für } a_n \quad A_0(u,v) = - \iint_{\Omega} u \Delta v dx dy$$

$$\text{für } b_n \quad B_0(u,v) = \iint_{\Omega} u v dx dy$$

$$\text{für } c_n \quad C_0(u,v) = \iint_{\Omega} u v dx dy .$$

Die anderen Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der Abbildungen (3.5.12-14) leicht bestimmen. Damit wollen wir die Betrachtungen über Entwicklungen von Bilinearformen abschließen und uns linearen Eigenwertaufgaben zuwenden.

4. Anwendungen bei elliptischen Eigenwertaufgaben

Die im letzten Abschnitt betrachteten diskreten Bilinearformen treten bei der Approximation elliptischer Randwertaufgaben mit der Methode der finiten Elemente auf. Es soll nun gezeigt werden, daß sich die Voraussetzungen des Satzes (1.2.1) erfüllen lassen, so daß eine Fehlerentwicklung nach dem Diskretisierungsparameter n nachgewiesen wird. Dieses Fehlerverhalten wird dann durch einige numerische Rechnungen bestätigt.

4.1 Problemstellung und Diskretisierung

Es sei Ω ein polygonales Gebiet wie in den beiden letzten Kapiteln. Es soll die Eigenwertaufgabe

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} \varphi \in \dot{W}_2^1(\Omega) \quad a(u, \varphi) &= \lambda b(u, \varphi) \\ b(u, u) &= 1 \end{aligned}$$

näherungsweise gelöst werden. Dabei ist $\dot{W}_2^1(\Omega)$ der übliche Sobolevraum und

$$(4.1.2) \quad a(u, v) = \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy$$

$$(4.1.3) \quad b(u, v) = \iint_{\Omega} uv dx dy .$$

Zur Bestimmung einer Folge von Näherungen werden die Galerkin-Gleichungen mit a_n , b_n und D_n wie in (3.5) gelöst.

$$(4.1.4) \quad \bigwedge_{\varphi_n \in D_n} \quad a_n(u_n, \varphi_n) = \lambda_n b_n(u_n, \varphi_n) \\ b_n(u_n, u_n) = 1 .$$

Anstelle von b_n läßt sich auch die in (3.5.4) definierte Bilinearform c_n verwenden. Dies führt dann zu den Gleichungen

$$(4.1.5) \quad \bigwedge_{\varphi_n \in D_n} \quad a_n(u_n, \varphi_n) = \lambda_n c_n(u_n, \varphi_n) \\ c_n(u_n, u_n) = 1 .$$

Auf die Konvergenz der Verfahren soll hier nicht weiter eingegangen werden. Betrachtungen hierzu findet man zum Beispiel bei Veidinger [1977] oder Bramble/Hubbard [1968].

4.2 Ganzzahlige Entwicklungen

In diesem Abschnitt sollen Bedingungen für die Existenz quadratischer Fehlerentwicklungen für die Verfahren von (4.1) angegeben werden. Damit dies möglich ist, muß eine Voraussetzung folgender Art erfüllt sein (Shift-Theorem) :

(4.2.1) Sei $f \in C_{2k}(\overline{\Omega})$ und v Lösung von

$$-\Delta v - \lambda v = f \quad \text{in } \Omega \\ v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Dann ist $v \in C_{2k+2}(\overline{\Omega})$.

Dies muß für die speziellen rechten Seiten richtig sein, die in den aus (1.2.22) hergeleiteten Gleichungen für die Koeffizienten der Entwicklung auftreten.

Die Aussage (4.2.1) ist i.a. nicht richtig , da daβ Gebiet Ω Ecken besitzt. So sind zum Beispiel die ersten Ableitungen der zum kleinsten Eigenwert des L-förmigen Gebiets Ω gehörenden Eigenfunktion nicht mehr beschränkt , obwohl die rechte Seite $f \equiv 0$ ist. Es gibt natürlich Eigenfunktionen , deren Ableitungen glatt bis zum Rand sind. Dies gilt für alle Lösungen zu folgenden Gebieten :

(4.2.2) rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck

(4.2.3) gleichseitiges Dreieck

(4.2.4) Dreieck mit $30^\circ/60^\circ/90^\circ$ Winkel

(4.2.5) Rechteck

(siehe hierzu auch Makai [1970]).

Wir vermuten , daβ alle Eigenfunktionen , die diese Differenzierbarkeitseigenschaft besitzen , zu Gebieten gehören , die sich durch Spiegelung aus einem der vier genannten Elementargebiete zusammensetzen lassen (L-Gebiet). Die Funktionen des Elementargebiets lassen sich dann ebenfalls durch Spiegelung fortsetzen. Da man alle diese Lösungen explizit angeben kann , ist ein Näherungsverfahren nicht mehr notwendig und alle Betrachtungen zu Fehlerentwicklungen erübrigen sich.

Es soll dennoch die Anwendung von Satz (1.2.1) vorgeführt werden , da sich hier gut demonstrieren läßt , wie man die Voraussetzungen des Satzes erfüllen kann. Es wird vor allem deutlich , von welcher Gestalt die Gleichungen für die Koeffizienten der Entwicklung sind und wie sie sich lösen lassen.

Wir definieren :

$$(4.2.6) \quad I = \mathbb{N}_0, \quad J = \{0, \dots, 2p-2\}, \quad \sigma_j(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^j \text{ für } j \in I$$

$$\overline{E} = D \text{ wie in (3.1.2)}$$

$$E_{2j} \text{ wie in (3.2.6) mit } p \text{ ersetzt durch } 2p \text{ und } E := E_0$$

Zur Konstruktion der Abbildung $\rho_n : D_n \rightarrow \overline{E}$ wählt man Funktionen

$$\varphi_j^{(n)} \in C_0^\infty(\Omega) \subset E_0 \text{ mit disjunktem Träger und :}$$

$$\text{Träger}(\varphi_j^{(n)}) \subset \text{Träger}(b_j^{(n)})$$

$$|\varphi_j^{(n)}(P)| \leq 1 \text{ in } \Omega, \quad \varphi_j^{(n)}(Q_j^{(n)}) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \rho_n(u_n) u_0 dx dy = 0 \neq 0$$

$$\text{wobei } \rho_n \text{ durch } \rho_n(b_j^{(n)}) = \varphi_j^{(n)} \text{ definiert ist.}$$

Wegen der Konvergenz $u_n \rightarrow u_0$ (Veidinger [1977]) ist dies stets möglich.

Es werden nun die Voraussetzungen von Satz (1.2.1) überprüft.

Die Konvergenz der Verfahren ist, wie bereits erwähnt, gesichert. Die Entwicklung der diskreten Bilinearformen ist genau der Inhalt von Satz (3.3.1) mit Korollar (3.3.4). Als nächstes betrachten wir die Stabilitätsbedingung (1.2.5).

Sei $h_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}$ linear und w_n Lösung von

$$(4.2.7) \quad \bigwedge_{\varphi_n \in D_n} a_n(w_n, \varphi_n) - \lambda_n b_n(w_n, \varphi_n) = h_n(\varphi_n)$$

Wegen der Symmetrie von a_n und b_n besitzt die Aufgabe (4.1.4)

N_n linear unabhängige Eigenvektoren $u_n^{(i)}$, $i=1, \dots, N_n$ und dazugehörige Eigenwerte $\lambda_n^{(i)}$ und es ist $b_n(u_n^{(i)}, u_n^{(j)}) = \delta_{ij}$.

Sei o.E.d.A. $\lambda_n = \lambda_n^{(1)}$ (einfach!) und $u_n = u_n^{(1)}$.

Die Lösung der inhomogenen Aufgabe (4.2.7) ist dann gegeben durch

$$(4.2.8) \quad w_n = \sum_{i=2}^N (\lambda_n^{(i)} - \lambda_n)^{-1} h_n(u_n^{(i)}) u_n^{(i)}$$

und es ist

$$(4.2.9) \quad \|w_n\|_n^2 = \sum_{i=2}^N (h_n(u_n^{(i)}))^2 (\lambda_n^{(i)} - \lambda_n)^{-2} \\ \leq \|h_n\|_n^2 \sum_{i=2}^N (\lambda_n^{(i)} - \lambda_n)^{-2}.$$

Da die Eigenwerte $\lambda_n^{(i)}$ von (4.1.4) monoton fallend gegen die entsprechenden Eigenwerte $\lambda^{(i)}$ von (4.1.1) konvergieren (Veidinger [1977], Satz 1), hat man nach geeigneter Numerierung der diskreten Eigenwerte $\lambda_n^{(i)}$:

$$(4.2.10) \quad \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{i, n \geq k} \lambda_n^{(i)} \geq \lambda^{(i)} \geq \lambda_n.$$

Da außerdem die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^{(i)})^{-2}$ konvergiert, ist

$$\|w_n\| \leq \|h_n\|_n^2 \left\{ \sum_{i=2}^k (\lambda_n^{(i)} - \lambda_n)^{-2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (\lambda^{(i)} - \lambda_n)^{-2} \right\}.$$

Wegen der Konvergenz der Eigenwerte ist der Ausdruck in den geschweiften Klammern gleichmäßig bzgl. n beschränkt. Dies ist die Behauptung.

Zur Überprüfung der Voraussetzungen (1.2.6-9) betrachten wir die einzelnen Terme, die in der Definition von τ_n bzw. θ_n auftreten. Jeder dieser Terme induziert eine lineare Abbildung, deren Beschränktheit nun gezeigt wird.

Es sei $\mathcal{E}_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathcal{E}_n(\varphi_n) = \mathcal{B}_{i\Omega}(\rho_n \varphi_n^{\beta_{k-i}} u_1) \quad (i \text{ gerade}) .$$

Zu zeigen ist also die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\mathcal{E}_n\|_n$ bzgl. n .

Für $\mathcal{B}_i$ erhält man aus (2.3.4) durch Zusammenfassen der Terme aus den Teildreiecken einen Ausdruck der Form

$$(4.2.11) \quad \mathcal{B}_{i\Omega}(v) = \iint_{\Omega} D_1^i v \, dx dy + \int_{\partial\Omega} D_2^{i-1} v \, ds + \sum_{P \in \partial\Omega} D_3^{i-2} v(P)$$

d.h.

Integral über Ω von i -ten Ableitungen von v
 + Integral über $\partial\Omega$ von $i-1$ -ten Ableitungen von v
 + $i-2$ -te Ableitungen an den Eckpunkten von Ω .

Die Gestalt der Differentialoperatoren ist hier nicht von Bedeutung. Bei der Herleitung des Ausdrucks (4.2.11) ist nur zu beachten, daß sich bei der Auswertung von (2.3.4) die Integrale über den Seiten der Dreiecke, die im Innern von Ω liegen, wegheben. Dies gilt auch für Ableitungen an den Eckpunkten der Dreiecke.

Nützt man nun die spezielle Gestalt von $\rho_n \varphi_n$ aus, so erhält man durch partielle Integration

$$(4.2.12) \quad \mathcal{E}_n(\varphi_n) = \iint_{\Omega} \rho_n \varphi_n D_1^{\beta_{k-i}} u_1 \, dx dy$$

und hieraus

$$(4.2.13) \quad |\mathcal{E}_n(b_j^{(n)})| = \left| \iint_{\Omega} \varphi_j^{(n)} D_1^{\beta_{k-i}} u_1 \, dx dy \right| \leq C(u_1) \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

mit $C(u_1)$ unabhängig von j und n .

Zur Abschätzung von $\|g_n\|_n$ benötigt man noch eine Aussage über die Eigenwerte der sogenannten "Massmatrix" M_n

$$M_n = (b_n(b_i^{(n)}, b_j^{(n)}))_{i,j=1,\dots,N_n}.$$

Es gilt :

$$(4.2.14) \quad \bigvee_{C_1, C_2 > 0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \quad C_1 \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \mu_i^{(n)} \leq C_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

n für jeden Eigenwert $\mu_i^{(n)}$ von M_n .

Zum Beweis siehe Fried [1972] , Satz 1.

Sei nun $\varphi_n \in D_n$ und $\varphi := (\varphi_n(q_i^{(n)}))_{i=1,\dots,N_n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |g_n(\varphi_n)|^2 &= \left| \sum_{i=1}^{N_n} \varphi_n(q_i^{(n)}) g_n(b_i^{(n)}) \right|^2 \\ &\leq \varphi^T \varphi \sum_{i=1}^{N_n} (g_n(b_i^{(n)}))^2 \\ &\leq C \varphi^T \varphi \left(\frac{1}{n}\right)^2, \end{aligned}$$

wegen (4.2.13) und $N_n = O(n^2)$.

Da außerdem aus (4.2.14) die Abschätzung

$$\varphi^T \varphi \leq \frac{1}{C_1} n^2 \varphi^T M_n \varphi = b_n(\varphi_n, \varphi_n) \frac{1}{C_1} n^2 = \|\varphi_n\|_n^2 \frac{1}{C_1} n^2$$

folgt , hat man insgesamt

$$(4.2.15) \quad |g_n(\varphi_n)| \leq \left(\frac{C}{C_1}\right)^{1/2} \|\varphi_n\|_n$$

und somit die gewünschte Aussage für g_n .

Auf dieselbe Weise zeigt man für die durch die Restgliedanteile definierte Abbildung $f_n(\varphi_n) = a_{jn}(u_i, \varphi_n \varphi_n)$ eine Abschätzung

$$(4.2.16) \quad \|f_n\|_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{2p-jC'} \quad (C' \text{ unabhängig von } n).$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für die anderen Restgliedanteile und somit ist die Voraussetzung (1.2.6) gezeigt.

Da in der Darstellung von θ_n ebenfalls nur Terme der Form ε_n auftreten, ist (1.2.7) ebenfalls erfüllt.

Wegen $|b_i(u_j, \rho_n u_n)| \leq C \|u_n\|_n = C$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \rho_n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_0(u_0, \rho_n u_n) \neq 0 \text{ (nach Konstruktion) .}$$

Somit ist auch (1.2.8) gezeigt.

Als letzte dieser Forderungen erhält man (1.2.9) aus der Tatsache, daß wegen der Stetigkeit der Funktionen u_j die Norm $\|r_n u_j\|_n$ gleichmäßig beschränkt bleibt. Es ist also nur noch die Lösbarkeit des Systems (1.2.22) zu zeigen. Setzt man dort die Darstellung (3.3.2) der Entwicklungskoeffizienten ein, so erhält man :

$$\begin{aligned} (4.2.17) \quad 0 &= \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^j \beta_{2i, \Omega} (\varphi [\alpha_{2j-2i} u_{2l-2j} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{1-j} \lambda_{2l-2j-2k} \beta_{2j-2i} u_{2k}]) \\ &= \sum_{i=0}^1 \beta_{2i, \Omega} (\varphi \{ \sum_{j=0}^{1-i} [\alpha_{2j} u_{2l-2i-2j} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{1-i-j} \lambda_{2l-2i-2j-2k} \beta_{2j} u_{2k}] \}) . \end{aligned}$$

Durch Induktion erhält man hieraus, daß der Ausdruck in den geschweiften Klammern für alle Indizes i und l verschwinden muß, d.h.

$$(4.2.18) \quad \bigwedge_{0 \leq l \leq p-1} \sum_{j=0}^1 [\alpha_{2j} u_{2l-2j} - \sum_{k=0}^{1-j} \lambda_{2l-2j-2k} \beta_{2j} u_{2k}] = 0 .$$

Setzt man die speziellen Darstellungen für α_0 und β_0 nach (3.5.12+13) ein, so erhält man die Gleichungen

$$(4.2.19) \quad l=0 \quad -\Delta u_0 - \lambda u_0 = 0$$

$$\begin{aligned} l>0 \quad -\Delta u_{2l} - \lambda u_{2l} &= \lambda_{2l} u_0 - \sum_{j=1}^l \alpha_{2j} u_{2l-2j} \\ &+ \sum_{j=0}^l \sum_{k=0}^{l-j} \lambda_{2l-2j-2k} \beta_{2j} u_{2k} \\ &\quad (j,k) \neq (0,0), (0,l) \end{aligned}$$

$$=: \lambda_{2l} u_0 - f_1(u_0, \dots, u_{2l-2}, \lambda_0, \dots, \lambda_{2l-2})$$

Da λ_0 Eigenwert ist ($l=0$!), hat man als notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung u_{2l} , daß die rechte Seite der Gleichung für $l>0$ orthogonal auf dem Eigenraum steht. Da einfache Eigenwerte vorausgesetzt wurden, ist dies durch die Wahl von λ_{2l} möglich, d.h.

$$(4.2.20) \quad \lambda_{2l} = - \iint_0 u_0 f_1(u_0, \dots, u_{2l-2}, \lambda_0, \dots, \lambda_{2l-2}) dx dy.$$

Die aus der Normierungsbedingung resultierende Gleichung nimmt im Fall $l=0$ die Gestalt

$$b_0(u_0, u_0) = 1$$

an. Damit ist u_0 (bis auf das Vorzeichen) eindeutig festgelegt. Für $l>0$ ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$b_0(u_0, u_{2l}) = g_1(u_0, \dots, u_{2l-2})$$

Damit wird der Anteil von u_{2l} in Richtung des Eigenraums festgelegt und somit ist u_{2l} eindeutig bestimmt. Die Wahl des Vorzeichens von u_0 spielt hier keine Rolle. Durch eine willkürliche

Festlegung erreicht man die Konvergenz gegen diese Eigenlösung. Dabei ist zu beachten, daß bei den diskreten Lösungen die Wahl des Vorzeichens nach denselben Gesichtspunkten erfolgt, damit die Voraussetzung (1.2.2) erfüllt ist. Ein mögliches Kriterium ist zum Beispiel:

Wähle $u_n(P) > 0$ für P aus einem geeigneten Teilgebiet Ω^* (etwa $\Omega^* = \{P_0\}$).

Diese Bedingung läßt sich bei der numerischen Berechnung der Lösungen stets erfüllen, so daß dann Konvergenz gegen die Lösung von (4.1.1) erfolgt, die derselben Bedingung genügt.

Der "Nachweis" der Differenzierbarkeitseigenschaften der Koeffizienten u_{21} , d.h. die Bedingung $u_{21} \in E_{21}$ erfolgt nun durch Induktion.

$l=0$ $u_0 \in E_0 = C_{2p+2}(\overline{\Omega})$ wird vorausgesetzt

$l>0$ Für die rechte Seite der definierenden Gleichung (4.2.19) von u_{21} gilt:

Da α_{2j} ein Differentialoperator der Ordnung $2j+2$ ist, liegt nach Induktionsvoraussetzung $\alpha_{2j}u_{21-2j}$ in $C_{2p-21}(\overline{\Omega})$. β_{2j} ist ein Differentialoperator der Ordnung $2j$ und somit ist $\beta_{2j}u_{2k} \in C_{2p+2-2j-2k} = C_{2p-21}$ wegen $k+j \leq 1$. Damit ist die rechte Seite in C_{2p-21} und somit nach "Voraussetzung" (4.2.1) u_{21} in $C_{2p-21+2}(\overline{\Omega})$. Dies war zu zeigen.

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen lassen sich in analoger Weise auch auf die diskrete Aufgabe (4.1.5) übertragen. Es ist dann an den entsprechenden Stellen b_n durch c_n bzw. β_{2j} durch γ_{2j} zu ersetzen.

4.3 Beispiele für quadratische Entwicklungen

Grundgebiet Ω sei das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ und die Triangulierung sei wie im Beispiel zu (3.5.1). Als Diskretisierungsverfahren wählen wir die Methode (4.1.5). Nach den Betrachtungen des letzten Abschnitts ist also eine quadratische Fehlerentwicklung zu erwarten, wenn die Lösungen des Gleichungssystems die Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllen.

Setzt man in (4.1.5) die zum Punkt $P=(p_1, p_2)$ gehörende Basisfunktion aus D_n ein, so erhält man aus (3.5.5) mit $\tau = 1$, $X = (1,0)$ und $Y = (0,1)$ die Gleichung:

$$(4.3.1) \quad 4u_n(P) - u_n(p_1 + \frac{1}{n}, p_2) - u_n(p_1 - \frac{1}{n}, p_2) \\ - u_n(p_1, p_2 + \frac{1}{n}) - u_n(p_1, p_2 - \frac{1}{n}) = \lambda_n (\frac{1}{n})^2 u_n(P) .$$

Dies ist genau das übliche Differenzenverfahren mit dem 5-Punkte Operator. Alle Lösungen dieser Gleichung sind wohlbekannt. Die $(n-1)^2$ Eigenwerte sind gegeben durch

$$(4.3.2) \quad \lambda_n = 2n^2 (2 - \cos \frac{1}{n}\pi - \cos \frac{m}{n}\pi) \quad 1, m=1, \dots, n-1$$

und die dazugehörigen Eigenfunktionen sind

$$(4.3.3) \quad u_n(x, y) = 2 \sin \frac{1\pi x}{n} \sin \frac{m\pi y}{n} \quad 1, m=1, \dots, n-1, (x, y) \in \Omega_n .$$

Die Eigenwerte und -funktionen der kontinuierlichen Aufgabe sind

$$(4.3.4) \quad \lambda = (l^2 + m^2)\pi^2 \quad 1, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$u(x, y) = 2 \sin l\pi x \sin m\pi y \quad 1, m = 1, 2, 3, \dots$$

Man hat also $u(P) = u_n(P)$ für $P \in \Omega_n$ und $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$u_n - r_n u \equiv 0.$$

In der Entwicklung von u_n gemäß (1.1.14) müssen daher alle Koeffizienten u_{2j} und das Restglied verschwinden.

Für die diskreten Eigenwerte erhält man aus (4.3.2) die Entwicklung :

$$\lambda_n = \pi^2(l^2 + m^2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(-1)^j}{(2j+2)!} \pi^{2j+2} [l^{2j+2} + m^{2j+2}] \left(\frac{1}{n}\right)^{2j}.$$

Die Entwicklungskoeffizienten λ_{2j} in (1.1.14) sind daher

$$(4.3.5) \quad \lambda_{2j} = \frac{2(-1)^j}{(2j+2)!} \pi^{2j+2} [l^{2j+2} + m^{2j+2}].$$

Diese Ergebnisse, die aus der Kenntnis der exakten Lösungen resultieren, werden nun durch Lösen des Gleichungssystems bestätigt.

Für $l = 1$ hat man

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 - \lambda u_2 &= \lambda_2 u_0 + \frac{2}{4!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^4 \right] u_0 \\ &= \left\{ \lambda_2 + \frac{1}{12} [(1\pi)^4 + (m\pi)^4] \right\} u_0 \end{aligned}$$

und somit

$$\lambda_2 = -\frac{1}{12} [1^4 + m^4] \pi^4$$

in Übereinstimmung mit (4.3.5). Außerdem ist $u_2 = cu_0$ mit $c \in \mathbb{R}$. c wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{B}_2(u_0 u_0) + 2\mathfrak{B}_0(u_0 u_2) \\ &= \mathfrak{B}_2(u_0^2) + 2c. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{B}_2(f)$ bestimmt man zuerst

$$(4.3.6) \quad \mathfrak{B}_{2T_0}(f) = \frac{1}{12} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \int_0^x f(x,y) dy dx + \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x,y) dy dx \right] \\ = \frac{1}{12} \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(1,y) dy + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,x) dx - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,0) dx \right]$$

falls $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$, und damit ist dann

$$(4.3.7) \quad \mathfrak{B}_2(f) = \frac{1}{12} \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(1,y) dy + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,1) dx \right. \\ \left. - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(0,y) dy - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,0) dx \right].$$

Für $f = u_0^2$ sind alle auftretenden partiellen Ableitungen auf dem Rand 0 , so daß $\mathfrak{B}_2(u_0^2) = 0$ und somit $c = 0$, d.h. $u_2 = 0$. Die anderen Koeffizienten lassen sich analog berechnen.

Es ist zu beachten, daß in diesem Beispiel die Einfachheit des Eigenwerts nicht benützt wurde. Dies ist in der speziellen Gestalt der Eigenfunktionen und Operatoren α_{2j} begründet. Es gilt nämlich

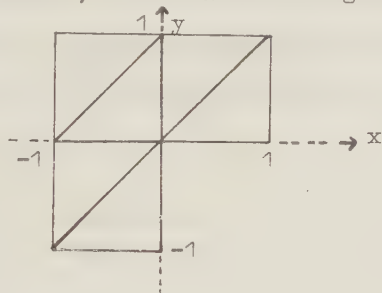
$$\alpha_{2j} u = \kappa(j) u$$

für alle Eigenfunktionen, so daß bei mehrfachen Eigenwerten die Orthogonalität der rechten Seite durch Wahl eines Parameters (nämlich λ_{2j}) erreicht werden kann. Bei komplizierteren Gebieten läßt sich dies natürlich nicht mehr verifizieren, so daß wir uns deshalb auf einfache Eigenwerte beschränkt haben.

In Abschnitt 4.9 wird dann ein numerisches Beispiel für quadratische Fehlerentwicklungen angegeben.

4.4 Nichtganzzahlige Entwicklungen

Wesentlich für die Existenz der quadratischen Entwicklungen des letzten Abschnitts waren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Lösung u_0 und die Koeffizienten u_{2j} . In der Regel ist dies jedoch nicht erfüllt. Wählt man, wie bereits in der Einleitung erwähnt, für Ω das L-förmige Gebiet,



(4.4.1) L - Gebiet mit Triangulierung

so ist bekannt (siehe (0.1.3)), daß die zum kleinsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion u_0 in der Nähe der 0 eine Darstellung der Form

$$u_0(r, \theta) = c_0 r^{2/3} \sin \frac{2}{3} \theta + O(r^{4/3}), \quad c_0 \neq 0$$

besitzt. Ein Ansatz wie in Abschnitt 4.2 führt dann beispielsweise auf die Gleichung

$$(4.4.2) \quad -\Delta u_2 - \lambda u_2 = \lambda_2 u_0 - \alpha_2 u_0 + \lambda_0 \beta_2 u_0 = O(r^{-10/3})$$

Die rechte Seite ist daher nicht mehr quadrat-integrierbar, so daß keine klassische bzw. schwache Lösung existiert.

Sinnvoll wäre es allenfalls, von u_2 ein Verhalten wie $O(r^{-4/3})$ zu verlangen. Allgemein würde dies bedeuten, daß für die Koeffizienten u_{2j} in einer Umgebung der 0 gefordert wird:

$$(4.4.3) \quad u_{2j}(r, \theta) = r^{2/3-2j} \varphi_{2j}(\theta) + \text{höhere Terme}.$$

Untersucht man nun das Verhalten von $(\frac{1}{n})^{2j} a_n(r_n u_{2j}, r_n v)$ für eine Testfunktion v mit $v(r, \theta) = r^\gamma \varphi(\theta)$, so ergeben sich Anteile der Form $(\frac{1}{n})^{2/3+\gamma} a_{2/3+\gamma}(u_{2j}, v)$. Man erkennt hier, daß formal alle $j \in \mathbb{N}$ in einer Entwicklung von u_n zugelassen werden müssen, also die Indexmenge in (1.1.14) für u_n abzählbar unendlich ist. Da man nicht zeigen (und erwarten) kann, daß fast alle u_{2j} verschwinden, ist ein Ansatz im Sinne von (1.1.14) mit Funktionen $u_{2j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nicht möglich. Wird nun speziell $\gamma < -\frac{2}{3}$ gewählt, so erhält der obige Faktor von $(\frac{1}{n})^{2/3+\gamma}$ die Gestalt

$$(4.4.4) \quad [v, A^{\mathbb{B}}_{(2/3-2j, 0)}(u_{2j})]$$

mit dem durch a_n^* induzierten Differenzenoperator A (vgl. (3.3.32)) und dem Skalarprodukt in $K_{3/2, d}$. Es müßte dann die Summe über alle Indizes j gebildet werden und die Konvergenz dieser Reihe in $K_{3/2, d}$ gezeigt werden. Dies läßt sich aber umgehen. Dazu faßt man alle Anteile aus (4.4.3) mit $j \geq p$ zusammen und bezeichnet sie mit $\varphi_{2/3} : K_{3/2, d} \rightarrow \mathbb{R}$. Damit besteht die mit dem Term in (4.4.4) gebildete Reihe aus einer endlichen Summe von singulären Anteilen der Koeffizienten u_{2j} , $j < p$ und einem Skalarprodukt mit einer Gitterfunktion. Stellt man nun folgende Forderungen an die Räume E_i ($u_i \in E_i$):

(4.4.5) Berücksichtigung von Singularitäten im Sinne von (4.4.3)

(4.4.6) Berücksichtigung geeigneter Gitterfunktionen,

so läßt sich die unendliche Indexmenge umgehen.

Daß die Eigenfunktion u_0 zum Eigenwert λ (wie auch später die Koeffizienten u_{2j}) eine Darstellung wie in (3.3.5) besitzen, folgt aus der Arbeit von Lehmann [1959]. Dort wird insbesondere gezeigt, daß u_0 in U_0 eine Entwicklung nach Besselfunktionen besitzt:

$$(4.4.7) \quad u_0(r, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(u_0) J_{j/\alpha}(\sqrt{\lambda} r) \sin \frac{j}{\alpha} \theta, \quad \Lambda_j(u_0) \in \mathbb{R}.$$

In den Bilinearformentwicklungen mit derartigen Funktionen sind daher Potenzen der Form $\frac{j}{\alpha} + 2k$ von $\frac{1}{n}$ zu erwarten - eventuell auch logarithmische Anteile. Daraus leiten sich dann folgende Definitionen für die Größen in Kapitel 1 ab:

$$(4.4.8) \quad I := \{(\frac{j}{\alpha} + 2k, 1) \mid j, k \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{N}_0\}$$

$$\sigma_i(n) := (\frac{1}{n})^{i_1} (\log \frac{1}{n})^{i_2} \quad \text{für } i = (i_1, i_2) \in I$$

$J \subset I$ eine geeignete endliche Teilmenge mit

$$(0, 0) \in J, \quad (0, 1) \notin J \quad \text{für } 1 > 0$$

$$0 \leq j_1 < p \quad \text{für } j = (j_1, j_2).$$

Da sich a priori nur sehr schwer sagen läßt, ob und in welcher Form logarithmische Anteile in der Entwicklung auftreten, wollen wir hier keine weiteren Angaben über J machen, sondern im Laufe der Rechnung (d.h. beim Lösen der Gleichungssysteme) ermitteln, wie J zu wählen ist.

Der lineare Raum $\overline{E}$, der dann die Teilräume E_i enthält und in dem sowohl Gitterfunktionen als auch auf Ω definierte Funktionen "enthalten" sein sollen, wird definiert durch

$$(4.4.9) \quad \overline{E} := D \times \{\varphi : K_{\alpha, d} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi|_{\partial K_{\alpha, d}} = 0\}$$

D wie in (3.1.2).

Die "Interpolierende" $r_n : \bar{E} \rightarrow D_n$ (es wird die Bezeichnung r_n beibehalten) in (1.1.5) wird nun als Summe der Abbildungen (3.1.4) und (3.4.1) erklärt :

$$(4.4.10) \quad r_n((u, \varphi)) := r_n u + r_n \varphi .$$

Auf die Konstruktion der Abbildung ϕ_n wollen wir erst beim Nachweis der Voraussetzungen (1.2.6-9) eingehen.

Es sollen nun die Voraussetzungen von Satz (1.2.1) überprüft werden. Die Konvergenz ist , wie bereits erwähnt , durch den Satz von Veidinger gesichert. Die Entwicklung der Bilinearformen wird nun mit Hilfe von Satz (3.3.7) und den Aussagen von Abschnitt 3.4 nachgewiesen. Wir wollen exemplarisch das Verhalten von a_n untersuchen. Für b_n läßt sich dann die Herleitung direkt übernehmen. Zu bemerken ist allenfalls , daß bei b_n die Differenzierbarkeitsforderungen gegenüber denen von a_n abgeschwächt werden können.

Sei nun $(v, \varphi) \in E_k$, $(w, \psi) \in E_l$ mit $k, l \in J$ und $k+l \in I_p$.
Dann ist

$$(4.4.11) \quad a_n(r_n((v, \varphi), (w, \psi))) = a_n(r_n v, r_n w) + a_n(r_n v, r_n \psi) \\ + a_n(r_n \varphi, r_n w) + a_n(r_n \varphi, r_n \psi) .$$

Anzugeben ist nun eine Entwicklung , deren Restglied sich wie $O((\frac{1}{n})^{p'-\epsilon})$ verhält mit $p' = p - k_1 - l_1$.

Mit A und B bezeichnen wir die durch a_n^* bzw. b_n^* induzierten Differenzenoperatoren in $K_{\alpha, d}$ gemäß (3.3.32).

Auf den ersten Anteil in (4.4.11) läßt sich Satz (3.3.7) anwenden. Damit das Restglied das gewünschte Verhalten besitzt, ist in (3.3.7) p zu ersetzen durch $p' := p - [k_1 + 1_1]$. Für jede der Funktionen v, w muß daher gelten: $v, w \in C_{p'+2}(\overline{N} \setminus \{0\})$. Es genügt daher,

$$(4.4.13) \quad v \in C_{p+2-[k_1]}(\overline{N} \setminus \{0\}) \quad \text{falls } (v, \varphi) \in E_k$$

zu fordern. Es ist also noch das Verhalten in der Nähe der 0 zu spezifizieren. Sei $s(v)$ wie in (3.3.6). Dann ist für hinreichend großes n die Ungleichung $\|r_n v\|_n \leq C(v) \left(\frac{1}{n}\right)^{s(v)-\epsilon}$ richtig. Berücksichtigt man die Bedingung (1.2.9), so ergibt dies folgende Forderung:

$$(4.4.14) \quad s(v) + k_1 > 0 \quad \text{falls } (v, \varphi) \in E_k.$$

$\gamma^*(v)$ muß nach Satz (3.3.7) die Ungleichungen

$$\gamma^*(v) > p' + 2 \quad \text{und} \quad \gamma^*(v) > p' - s(w)$$

erfüllen. Hinreichend hierfür ist wegen (4.4.14)

$$(4.4.15) \quad \gamma^*(v) > p + 2 - [k_1].$$

Dies führt schließlich zu folgender Definition:

$$(4.4.16) \quad E_k^1 := \{u \mid u \text{ erfüllt (4.4.13-15)}\}.$$

Bedingungen für $s(\varphi)$ erhält man durch Anwendung der Aussagen von Abschnitt 3.4 auf die restlichen Anteile in (4.4.11).

Betrachtet man $a_n(r_n \varphi, r_n w)$, so genügt es, nur Indizes $i \in I_w$ mit $2 - \sigma_a + i_1 < p - l_1 - k_1$ zu berücksichtigen. In Lemma (3.4.4) wird dann $s(\varphi) < \sigma_a - 2 - i_1$ verlangt. Es genügt daher,

$$(4.4.17) \quad s(\varphi) < -p + k_1$$

($\sigma_a = 2!$) zu verlangen.

Damit in den Bilinearformen , die in Abschnitt 3.4 definiert sind , auch die Symmetrie ausgenutzt werden kann , ist es sinnvoll , neben der Wachstumsbedingung für $\varphi(P)$ auch die für $A\varphi(P)$ zu stellen. Damit erhält man folgende Definition :

$$(4.4.18) \quad E_k'' := \{ \varphi \mid \varphi \text{ erfüllt (3.4.2+3) mit } s(\varphi) < -p + k_1 \} .$$

Die Teilräume E_k im Satz (1.2.1) sind dann

$$(4.4.19) \quad E_k := E_k' \times E_k'' .$$

Werden nun auf (4.4.11) die Entwicklungen von Kapitel 3 angewandt , so erhält man durch Zusammenfassen aller Terme mit dem gemeinsamen Faktor $(\frac{1}{n})^{j_1} (\log \frac{1}{n})^{j_2}$ für $(v, \varphi) \in E_k$, $(w, \psi) \in E_1$ und $j_1 < p - k_1 - l_1$ den Ausdruck :

$$\begin{aligned} (4.4.20) \quad a_j((v, \varphi), (w, \psi)) &= \delta_{j_2, 0} x_{2\mathbb{N}_0} (j_1)^{j_1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{2\mu} (v \alpha_{j_1-2\mu} w) + \delta_{j_1, 0} \delta_{j_2, 0} [\varphi, A\psi] \\ &+ \sum_{\substack{f \in I_v \\ f_1 + g_1 = j_1}} \sum_{g \in I_w} A_{j_2}^* (\mathfrak{P}_f(v), \mathfrak{P}_g(w)) \\ &+ \sum_{\substack{f \in I_v \\ f_1 = j_1}} \binom{f}{j_2} [\mathfrak{P}_f v \log r^{-j_2, A\psi}] + \sum_{\substack{g \in I_w \\ g_1 = j_1}} \binom{g}{j_2} [\varphi, A(\mathfrak{P}_g w \log r^{-j_2})] . \end{aligned}$$

Dabei stammen der erste und der dritte Anteil in dieser Darstellung aus Satz (3.3.7) , der zweite aus Lemma (3.4.6) , der vierte aus Lemma (3.4.5) und schließlich der letzte aus Lemma (3.4.4). Außerdem wurde der Index Ω beim Term $\mathfrak{A}_{2\mu}$ weggelassen , da hier Verwechslungen auszuschließen sind.

Für den Koeffizienten b_j in der Entwicklung von b_n ergibt sich analog :

$$\begin{aligned}
 (4.4.21) \quad & b_j((v, \varphi), (w, \psi)) \\
 &= \delta_{j_2, 0} x_2 N_0(j_1)^{j_1/2} \sum_{\mu=0}^{j_1/2} \delta_{2\mu}(v \beta_{j_1-2\mu} w) + \delta_{j_1, 2} \delta_{j_2, 0} [\varphi, B\psi] \\
 &+ \sum_{f \in I_v} \sum_{g \in I_w} B_{j_2}^*(\mathbb{P}_f(v), \mathbb{P}_g(w)) \\
 &\quad f_1 + g_1 = j_1 - 2 \\
 &+ \sum_{f \in I_v} \binom{f}{j_2} [\mathbb{P}_f v \log r^{-j_2}, B\psi] + \sum_{g \in I_w} \binom{g}{j_2} [\varphi, B(\mathbb{P}_g w \log r^{-j_2})]. \\
 &\quad f_1 = j_1 - 2 \qquad \qquad \qquad g_1 = j_1 - 2
 \end{aligned}$$

Da die vollständige Darstellung des Restglieds sehr umfangreich und unübersichtlich ist, wollen wir hier nur die Terme auflisten, welche später beim Nachweis der Abschätzungen (1.2.6-8) benötigt werden. Es werden nur die Terme angegeben, die für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\varphi = 0$ als Faktoren von $(\frac{1}{n})^{p-k_1-1} \gamma_1$ auftreten :

$$(4.4.22) \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{k_1+1} \gamma_1^{-[k_1+1]} A_{p-[k_1+1], n}(v, w) \quad (\text{aus Satz (3.3.7)})$$

$$(4.4.23) \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{1+k_1-p} \sum_{P \in \bar{\Omega}_n \cap \bar{U}_0} v(P) A\psi(nP) \quad (\text{aus Lemma (3.4.5)}).$$

Alle anderen Faktoren verschwinden wegen $\varphi = 0$. Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich in diesem Fall auch für das Restglied von b_n . Er stimmt mit obigem überein, wenn man "A" durch "B" ersetzt.

Damit ist die Voraussetzung (1.2.3) von Satz (1.2.1) gezeigt.

Auf die Lösbarkeit des Systems (1.2.4) soll in den nächsten Abschnitten genauer eingegangen werden. Da außerdem im Nachweis der Stabilitätsbedingung die gegenüber dem Abschnitt 4.2 geänderte Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktionen nicht eingehen, kann der Beweis (4.2.7-9) direkt übernommen werden, so daß nur noch die Voraussetzungen (1.2.6-8) zu zeigen sind. Damit verbunden ist auch die Konstruktion der Abbildung ρ_n .

In Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, daß hinreichend für (1.2.6+7) Abschätzungen für $u_i = (u_i^1, \varphi_i^1)$ der Form

$$(4.4.24) \quad |b_j(u_i, \rho_n b_\mu^{(n)})| \leq c_1 \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$|a_{jn}(u_j, \rho_n b_\mu^{(n)})| \leq c_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$|b_{jn}(u_j, \rho_n b_\mu^{(n)})| \leq c_3 \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

sind. ρ_n wird nun so konstruiert, daß (4.4.24) und (1.2.8) erfüllt werden. Wir wählen wieder Funktionen $\varphi_\mu^{(n)}$ wie in (4.2.6), wobei wir an die Funktionen mit $Q_\mu^{(n)} \in U_0$ zusätzliche Bedingungen stellen werden. Zunächst wird durch

$$(4.4.25) \quad \rho_n(b_\mu^{(n)}) := (\varphi_\mu^{(n)}, 0) \in E_0$$

eine zulässige Abbildung erklärt. Setzt man nun dieses Element von E_0 in die Darstellung (4.4.21) von b_j ein, dann treten wie in (4.2.12) wegen $\varphi_\mu^{(n)} \in C_0^\infty(\Omega)$ nur Terme der Form

$$\int_\Omega \varphi_\mu^{(n)} D_1^\nu \beta_{j_1 - \nu} u_1^i dx dy \quad (\text{falls } j_1 \text{ gerade!})$$

auf. Diese lassen sich sofort durch

$$|T_{un}| \max\{|D_1^\nu \beta_{j_1 - \nu} u_1^i(x, y)| \mid (x, y) \in T_{un}\}$$

abschätzen. Dabei ist T_{un} der Träger von $\varphi_\mu^{(n)}$ und $|T_{un}|$ die Fläche.

Ist $Q_{\mu}^{(n)} \in U_0$, so ist $|T_{\mu n}| = O((\frac{1}{n})^2)$ und der zweite Faktor läßt sich durch das Maximum der Funktionswerte in $\Omega \setminus U_0$ abschätzen, welches nach Voraussetzung ($u_i \in E_i$) existiert. Gilt jedoch $Q_{\mu}^{(n)} \in U_0$, so ist wegen der möglichen Singularität von u_i' bei 0 dieses Maximum nicht mehr gleichmäßig bzgl. n beschränkt. Man hat für hinreichend großes n

$$\max_{\mu} \max_{P \in T_{\mu n}} |D_1^{\nu} \beta_{j_1 - \nu} u_1'(P)| \leq C(u_1') (\frac{1}{n})^{-j_1 - i_1}.$$

Da in den Restgliedanteilen von a_n Ableitungen bis zur Ordnung $p+2$ auftreten und $i_1 < p$ gilt, fordert man sinnvollerweise:

(4.4.25) $|T_{\mu n}| = O((\frac{1}{n})^{2p+4})$. Damit ist dann für alle Terme mit b_j in (4.4.24) das gewünschte Ergebnis erreicht. Eine Konsequenz dieser Wahl ist zwar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{U_0} \rho_n u_n u_0 dx dy = 0,$$

jedoch läßt sich wegen der Konvergenz $u_n \rightarrow u_0$ stets die Bedingung

$$(4.4.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus U_0} u_0 \rho_n u_n dx dy \neq 0$$

erfüllen.

Es soll nun noch exemplarisch die Abschätzung (4.4.24) für das Restglied a_{jn} gezeigt werden. Für b_{jn} gilt die Behauptung dann analog. Im Fall $Q_{\mu}^{(n)} \in U_0$ ist

$$a_{jn}(\rho_n b_{\mu}^{(n)}, u_j) = A_{p-[j_1], n, \Omega \setminus U_0}(\rho_n b_{\mu}^{(n)}, u_j')$$

mit der Darstellung (3.3.3) des Restglieds. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Ableitungen von u_j' in $\Omega \setminus U_0$ ergibt sich wegen $|T_{\mu n}| = O((\frac{1}{n})^2)$ in diesem Fall die Behauptung.

Sei nun $Q_{\mu}^{(n)} \in U_0$. Dann ist wegen (4.4.22+23)

$$(4.4.27) \quad a_{jn}(\rho_n b_{\mu}^{(n)}, u_j) = \left(\frac{1}{n}\right)^{j_1 - [j_1]} A_{p - [j_1], n}(\rho_n b_{\mu}^{(n)}, u_j) \\ + \left(\frac{1}{n}\right)^{j_1 - p} A \varphi_j(n Q_{\mu}^{(n)}) .$$

Für $A_{p - [j_1], n}$ kann wegen $\varphi_{\mu}^{(n)} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ebenfalls die Restglieddarstellung (3.3.3) benutzt werden. Dieser Anteil verhält sich dann wegen (4.4.25) wie $O((\frac{1}{n})^2)$.

Da $\varphi_j \in E_j''$ und somit $j_1 - p - s(\varphi_j) > 0$ hat man :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{j_1 - p} |A \varphi_j(n Q_{\mu}^{(n)})| \leq C(\varphi_j) \left(\frac{1}{n}\right)^{j_1 - p} |n Q_{\mu}^{(n)}|^{-s(\varphi) - 2} \\ \leq C' \left(\frac{1}{n}\right)^{j_1 - p - s(\varphi_j) + 2} = O((\frac{1}{n})^2) .$$

Damit ist die Gültigkeit der Abschätzungen (4.4.24) gezeigt und somit auch (1.2.6+7). Gleichzeitig hat man auch die gleichmäßige Beschränktheit der linearen Abbildungen $b_j(\rho_n(\cdot), u_i)$ (vgl. Abschnitt 4.2), sodaß man aus (4.4.26) sofort (1.2.8) erhält :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \rho_n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_0(\rho_n u_n, u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus U_0} u_0 \rho_n u_n dx dy \neq 0 .$$

Die Bedingung (1.2.9) wurde bereits bei der Wahl der Teilräume E_i berücksichtigt, so daß bis auf die Lösbarkeit des Systems (1.2.4) alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Es gilt also

(4.4.28) Satz

Es sei $J \subset I$ eine geeignete Indexmenge, so daß das System (1.2.4) Lösungen $(u_j, \lambda_j) \in E_j \times \mathbb{R}$ besitzt. Dann hat der globale Diskretisierungsfehler der Aufgabe (4.1.1) eine asymptotische Entwicklung der Form (1.1.7).

Dieser Satz besagt, daß die Potenzen von $\frac{1}{n}$ in dieser Entwicklung (möglicherweise auch logarithmische Anteile) gerade durch die auftretenden Besselfunktionen in der Darstellung (4.4.7) der Eigenfunktionen bestimmt werden. Es treten die Terme auf, für welche sich die Gleichungen (1.2.4) mit geeigneten Funktionen lösen lassen. Sie können daher sukzessive durch Erfüllen von (1.2.4) bestimmt werden.

Bei den Betrachtungen dieses Abschnitts sind wir davon ausgegangen, daß die Eigenfunktion u_0 in der Nähe der 0, also in einer ausgezeichneten Ecke Singularitäten in den Ableitungen besitzt und sonst glatt bis zum Rand ist, d.h. in allen anderen Ecken. Dies sollte auch für die Koeffizienten u_1 der Entwicklung gelten. Eine solche Annahme wird natürlich in der Regel nie erfüllt sein, so daß der Satz eigentlich eine leere Aussage beinhaltet. Eine korrekte Formulierung müßte daher alle Ecken berücksichtigen. Wir haben jedoch der Übersichtlichkeit halber bei der Durchführung des Beweises darauf verzichtet und wollen daher jetzt kurz den allgemeinen Ansatz skizzieren:

Seien $P_1, \dots, P_m$ die Ecken von Ω mit dazugehörigen Innenwinkeln $\alpha_\mu \pi$, $0 < \alpha_\mu < 2$ und $\alpha_\mu \neq 1$. Jeder Ecke wird ein Punktgitter $K_{\alpha_\mu, d}$ zugeordnet (vgl. (3.3.30)). Die Räume E_i sind dann definiert durch

$$E_i := E_i^! \times E_i^{(1)} \times \dots \times E_i^{(m)}$$

mit $E_i^!$ wie in (4.4.16) unter Berücksichtigung aller Ecken und

$$E_i^{(\mu)} \subset \{ \varphi : K_{\alpha_\mu, d} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi|_{\partial K_{\alpha_\mu, d}} \equiv 0 \}.$$

Alle Überlegungen in diesem Abschnitt lassen sich dann in kanonischer Weise übertragen , so daß die Aussage des Satzes richtig bleibt.

In den Fehlerentwicklungen würden dann Potenzen von $\frac{1}{n}$ der Form

$$\sum_{u=1}^m \frac{1}{\alpha_u} j_u + 2v \quad , \quad j_u \quad , \quad v \in \mathbb{N}_0$$

auftreten. In diesem Fall erscheint uns ein Extrapolationsverfahren als wenig effizient. Denn man müßte eine große Anzahl von Näherungen berechnen um dann durch Extrapolation nur eine geringe Verbesserung in der Konvergenzordnung zu erhalten.

Andere Verfahren sind dann sicher besser geeignet , so etwa die Hinzunahme singulärer Ansatzfunktionen bei finiten Elementen (Fix [1969] , Fix/Gulati/Wakoff [1973]). Sind jedoch nur wenige Ecken vorhanden oder sind die Innenwinkel ganzzahliges Vielfaches eines festen Winkels (L-Gebiet !) , dann ist die Extrapolation durchaus konkurrenzfähig.

Wir wollen bei den folgenden Betrachtungen über die Lösbarkeit des Systems (1.2.4) wieder davon ausgehen , daß die Singularitäten nur in einer Ecke sind. Da bei der Beweisführung alle für diese Gleichungen typischen Probleme auftreten , läßt sich der allgemeine Fall dann direkt ableiten. Zunächst sollen nun die entstehenden Gleichungen durch Einsetzen der Darstellungen (4.4.20+21) auf eine kanonische Form gebracht werden.

4.5 Gleichungen für die Koeffizienten der Entwicklung

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß (1.2.4) ein System von Differential- (in Ω) und Differenzgleichungen (in $K_{\alpha,d}$) darstellt. Zu bestimmen sind also $u_i = (u_i', \varphi_i) \in E_i$, die (1.2.4) für beliebige $(v, \varphi) \in E_0$ erfüllen.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(4.5.1) \quad u_i^* := \sum_{k+l=i} \lambda_k u_l' \quad \text{und} \quad \varphi_i^* := \sum_{k+l=i} \lambda_k \varphi_l$$

und bezeichnen mit $j-2$ den Index $(j_1-2, j_2) \in I$.

Werden in die Gleichungen die Darstellungen (4.4.20 + 21) der Koeffizienten der Bilinearformentwicklungen eingesetzt, so erhält man für $l \in I_p$:

$$\begin{aligned} (4.5.2) \quad 0 &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_{jp}} [a_j((v, \varphi), (u_i', \varphi_i)) - b_j((v, \varphi), (u_i^*, \varphi_i^*))] \\ &\quad i+j=1 \\ &= \sum_{v=0}^{[1_1/2]} \sum_{\mu=0}^v \beta_{2\mu} (v [\alpha_{2v-2\mu} u'(1_{1-2v}, 1_2) - \beta_{2v-2\mu} u^*(1_{1-2v}, 1_2)]) \\ &\quad + [\varphi, A\varphi_1 - B\varphi_{1-2}^*] \\ &\quad + \sum_{i_2=0}^1 \{ \sum_{\substack{f_1+g_1+i_1=1_1 \\ f_2, g_2 \geq 0}} [A_{1_2-i_2}^*(\mathbb{P}_f v, \mathbb{P}_g u_i') - B_{1_2-i_2}^*(\mathbb{P}_f v, \mathbb{P}_g u_i^*)] \\ &\quad + \sum_{\substack{f_1+i_1=1_1 \\ f_2 \geq 0}} \binom{f_2-i_2}{1_2-i_2} [\mathbb{P}_f v \log r^{i_2-1_2}, A\varphi_i - B\varphi_{i-2}^*] \\ &\quad + \sum_{\substack{g_1+i_1=1_1 \\ g_2 \geq 0}} \binom{g_2-i_2}{1_2-i_2} [\varphi, A(\mathbb{P}_g u_i' \log r^{i_2-1_2}) - B(\mathbb{P}_g u_i^* \log r^{i_2-1_2})] \} \end{aligned}$$

Wählt man v hinreichend glatt mit $I_v = \emptyset$ und $\varphi = 0$, so bleibt nur der erste Anteil stehen. Mit denselben Umformungen wie in (4.2.17) ergibt sich ein System, welches genau (4.2.18) entspricht

$$(4.5.3) \quad \bigwedge_{1 \in J} \sum_{v=0}^{[l_1/2]} [\alpha_{2v} u^v (l_1 - 2v, l_2) - \beta_{2v} u^* (l_1 - 2v, l_2)] = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine inhomogene Eigenwertaufgabe dar (vgl. (4.2.19)), deren rechte Seite i.a. nicht mehr quadratintegrierbar ist (siehe (4.4.2)). Auf die Existenz und Lösungsdarstellungen von (4.5.3) wollen wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen. Wir setzen daher für die folgenden Betrachtungen voraus, daß die Koeffizienten Gleichung (4.5.3) erfüllen.

Wählt man nun $v = 0$ und $\varphi \in E_0^n$, so nimmt (4.5.2) folgende Gestalt an (mit $\varphi_1 := 0$ falls $1 \notin J$):

$$(4.5.4) \quad 0 = [\varphi, A\varphi_1 - B\varphi_{1-2}^* + \sum_{i_2=0}^{l_2} \sum_{\substack{g_1+i_1=l_1 \\ g_2 \geq 0}} (g_2 \varphi_{1-2}^{i_2}) \times \\ \times \{A\varphi_{g_1} u^{i_1} \log r^{i_2-1} l_2 - B\varphi_{g_2-2} u^{i_1} \log r^{i_2-1} l_2\}].$$

Da insbesondere die Lagrangefunktionen δ_Q mit $\delta_Q(P) := \delta_{QP}$ in E_0^n liegen, stellt (4.5.4) eine Differenzengleichung in $K_{\alpha,d}$ dar, deren Lösbarkeit im Abschnitt 4.6 untersucht werden soll

Die Gleichungen (4.5.3) und (4.5.4) ergeben sich durch Einsetzen spezieller Testfunktionen (v, φ) aus dem ursprünglichen System (4.5.2). Es läßt sich sogar zeigen, daß sie hinreichend für (4.5.2) sind.

(4.5.5) Lemma

(u_i, λ_i) lösen (4.5.2) genau dann, wenn sie auch Lösungen von (4.5.3+4) sind.

Beweis : Es ist nur noch die hinreichende Richtung zu zeigen.

Da (4.5.3+4) durch Zusammenfassen bzw. Umordnen von Termen aus (4.5.2) entstanden sind, verschwinden diese Anteile. Zu zeigen ist also, daß für beliebiges $v \in E_0'$ gilt :

$$(4.5.6) \quad 0 = \sum_{i_2=0}^{1_2} \left(\sum_{\substack{f_1+i_1=1_1 \\ f_2 \geq 0}}^{f_2=i_2} \right) [T_f v \log r^{i_2-1_2, A\varphi_i} - B\varphi_{i-2}^*] \\ + \sum_{\substack{f_1+g_1+i_1=1_1 \\ f_2, g_2 \geq 0}}^{f_2=i_2} [A_{1_2-i_2}^*(T_f v, T_g u_1^*) - B_{1_2-i_2}^*(T_f v, T_{g-2} u_1^*)].$$

Da hier nur die Anteile $T_f v$, $f \in I_v$ berücksichtigt werden, genügt es, einelementige Indexmengen I_v zu betrachten und obige Behauptung für $v_f := T_f v$ nachzuweisen. Setzt man $h = 1_1 - f_1$, so ist (4.5.6) gleichbedeutend mit :

$$(4.5.7) \quad 0 = \sum_{i_2=0}^{1_2} \left(\sum_{f_2=i_2}^{f_2=i_2} \right) [v_f \log r^{i_2-1_2, A\varphi(h, i_2)} - B\varphi_{(h-2, i_2)}^*] \\ + \sum_{\substack{g_1+i_1=h \\ g_2 \geq 0}}^{f_2=i_2} [A_{1_2-i_2}^*(v_f, T_g u_1^*) - B_{1_2-i_2}^*(v_f, T_{g-2} u_1^*)].$$

Es müssen nun die Darstellungen (3.3.36) bzw. (3.3.37) von A_μ^* und B_μ^* eingesetzt werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir annehmen, daß $M_0 = 1$ und $\psi_1(x, y) = (x, y)$ gilt, d.h. daß die Ecke 0 in genau einem Dreieck, dem Einheitsdreieck T_0 liegt. Dies ist keine Einschränkung, da die Berücksichtigung mehrerer Dreiecke nur den Schreibaufwand erhöht.

Kehrt man außerdem im ersten Term von (4.5.7) die Summationsreihenfolge um ($i_2 \rightarrow l_2 - i_2$) und beachtet, daß man das Skalarprodukt $[,]$ auch als Grenzwert schreiben kann, so erhält man :

$$\begin{aligned}
 (4.5.8) \quad 0 &= \sum_{i_2=0}^{l_2} \binom{f_2}{i_2} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\xi=1}^s \sum_{\eta=0}^{\xi} v_f \log r^{-i_2} \times \right. \\
 &\quad \times [A\varphi(h, l_2 - i_2) - B\varphi^*(h-2, l_2 - i_2)](\xi, \eta) \\
 &+ \sum_{\substack{\xi_1 + i_1 = h \\ \xi_2 \geq 0}} \sum_{\mu=0}^{l_2 - i_2} \binom{f_2}{\mu} \binom{\xi_2}{l_2 - i_2 - \mu} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\xi=1}^s \sum_{\eta=0}^{\xi} v_f \log r^{-\mu} \times \right. \\
 &\quad \times [A\mathbb{T}_{g_1} u_1^! \log r^{i_2 - l_2 + \mu} - B\mathbb{T}_{g-2} u_1^* \log r^{i_2 - l_2 + \mu}](\xi, \eta) \\
 &+ \sum_{v+j \leq f_1 + g_1} \int_{(f_1 + g_1 - v - j + 1)}^s F_j(v_f \log r^{-\mu} \alpha_v \mathbb{T}_{g_1} u_1^! \log r^{i_2 - l_2 + \mu})(x) dx \\
 &- \sum_{v+j \leq f_1 + g_1} \int_{(f_1 + g_1 - v - j + 1)}^s F_j(v_f \log r^{-\mu} \beta_v \mathbb{T}_{g-2} u_1^* \log r^{i_2 - l_2 + \mu})(x) dx \Big] \\
 &+ \text{entsprechende Anteile mit } L_p \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{l_2} \binom{f_2}{\mu} \sum_{\xi=1}^s \sum_{\eta=0}^{\xi} v_f \log r^{-i_2} [A\varphi(h, l_2 - i_2) - B\varphi^*(h-2, l_2 - i_2)] \right. \\
 &+ \sum_{\xi_1 + i_1 = h} \sum_{\xi_2=0}^{l_2 - i_2} [A\mathbb{T}_{g_1} u_1^! \log r^{i_2 - l_2 + \mu} - B\mathbb{T}_{g-2} u_1^* \log r^{i_2 - l_2 + \mu}] \\
 &+ \sum_{i_2=0}^{l_2} \sum_{\xi_1 + i_1 = h} \sum_{\mu=0}^{l_2 - i_2} \binom{f_2}{\mu} \binom{\xi_2}{l_2 - i_2 - \mu} \left[\sum_{v+j \leq f_1 + g_1} \dots - \sum_{v+j \leq f_1 + g_1} \dots \right] \Big\} \\
 &+ \text{entsprechende Anteile mit } L_p .
 \end{aligned}$$

In den $[\quad]$ Klammern steht genau derselbe Ausdruck wie in (4.5.4) mit 1 ersetzt durch $(h, l_2 - \mu)$, der somit nach Voraussetzung verschwindet. Benützt man die Umformung (3.3.35) für den übriggebliebenen Anteil in den geschweiften Klammern, so ergibt sich dann :

$$(4.5.9) \quad \sum_{i_2=0}^{l_2} \sum_{g_1+i_1=h} \sum_{\mu \geq 0} \sum_{v+j \leq f_1+g_1} \binom{\mu}{l_2-i_2} \times \\ \times \int_{(f_1+g_1-v-j+1)}^s F_j(\mathbb{T}_{(f_1+g_1-v-2, \mu)}(v_f[\alpha_v u_1^! - \beta_v u_1^*] \log r^{i_2-1_2}))(x) dx.$$

Setzt man $\mu_1 = f_1 + g_1 - v = l_1 - i_1 - v \leq l_1$, so ist $v+j \leq f_1 + g_1$ genau dann, wenn $j \leq \mu_1$. Der obige Ausdruck besteht für festes i_2 , μ , $\mu_1 \leq l_1$ und $j \leq \mu_1$ nur aus Termen der Gestalt

$$(4.5.10) \quad \sum_{i_1+v=l_1-\mu_1} \int_{(\mu_1-j+1)}^s F_j(\mathbb{T}_{(\mu_1-2, \mu)}(v_f \times \\ \times [\alpha_v u_1^! - \beta_v u_1^*] \log r^{i_2-1_2}))(x) dx.$$

Aus der Lösbarkeit von (4.4.3) folgt schließlich, daß in (4.5.10) die Summe über die Anteile in den eckigen Klammern verschwindet ($\alpha_v = \beta_v = 0$ für ungerades v !) und somit auch der Ausdruck (4.5.9). Es ist also nur noch das Verschwinden der Summanden mit L_p in (4.5.8) zu zeigen. Dies läßt sich aber mit genau denselben Umformungen und der Schlußweise wie bei (4.4.10) durchführen, so daß die Behauptung des Lemmas gezeigt ist.

Als nächstes betrachten wir die Gleichungen, die aus der Normierungsvorschrift abgeleitet worden sind. Durch sie werden die Anteile der Lösungen der inhomogenen elliptischen Eigenwertaufgabe (4.5.3) in Richtung des Eigenraums festgelegt. Sie sollen jedoch nicht in der Ausführlichkeit untersucht werden, wie die anderen Gleichungen, da sich keine wesentlichen Vereinfachungen finden lassen. Wir geben sie dann speziell für die Anteile $u_j^!$ an, die in der Entwicklung von u_n dominierend sind ($j_1 \leq 2$). Setzt man die Darstellung (4.4.21) von b_j ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (4.5.11) \quad \delta_{1,0} &= \sum_{i+j+k=1} b_j(u_i, u_k) \\
 &= \frac{1}{\tau} \sum_{i_2+k_2=1_2} \sum_{v=0}^{[1_1/2]} \sum_{i_1+k_1=1_1-2v} \sum_{u=0}^v \mathfrak{B}_{2u}(u_i' \mathfrak{B}_{2v-2u} u_k') \\
 &\quad + \sum_{i+k=1-2} [\varphi_i, B\varphi_k] \\
 &\quad + \sum_{i_2+j_2+k_2=1_2} \left\{ \sum_{\substack{f_1+g_1+i_1+k_1=1_1-2 \\ f_2, g_2 \geq 0}} B_{j_2}^* (\mathfrak{P}_f u_i', \mathfrak{P}_g u_k') \right. \\
 &\quad + \sum_{\substack{i_1+f_1+k_1=1_1-2 \\ f_2 \geq 0}} \binom{f_2}{k_2} [\mathfrak{P}_f u_i' \log r^{-j_2}, B\varphi_k] \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{i_1+g_1+k_1=1_1-2 \\ g_2 \geq 0}} \binom{g_2}{k_2} [\varphi_i, B\mathfrak{P}_g u_k' \log r^{-j_2}] \right\}.
 \end{aligned}$$

Wegen $u_i' \in E_i^1$ ist $\mathfrak{P}_f u_i' = 0$ falls $f_1 + i_1 \leq 0$. Damit verschwinden für $1_1 \leq 2$ alle Terme in den geschweiften Klammern, so daß sich (4.5.11) wesentlich vereinfacht:

$$(4.5.12) \quad 1 = 0 \quad 1 = \mathfrak{B}_0(u_0'^2)$$

$$(4.5.13) \quad 0 < 1_1 < 2 \quad 0 = \sum_{i+k=1} \mathfrak{B}_0(u_i' u_k')$$

$$\begin{aligned}
 (4.5.14) \quad 1_1 = 2 \quad 0 &= \sum_{i+k=1} \mathfrak{B}_0(u_i' u_k') \\
 &\quad + \delta_{1_2,0} [\tau \mathfrak{B}_2(u_0'^2) + \mathfrak{B}_0(u_0' \mathfrak{B}_2 u_0')] .
 \end{aligned}$$

Speziell beim L-Gebiet ist $\mathfrak{P}_f u_i' = 0$ im Fall $f_1 + i_1 < \frac{2}{3}$.

Daher verschwinden die Anteile in den geschweiften Klammern für $1_1 < \frac{10}{3}$, so daß dann (4.5.14) gültig bleibt. Dabei wurde hier vorausgesetzt, daß $\varphi_0 = 0$ ist, was erst später bewiesen wird.

Auf weitergehende Betrachtungen zu diesen Gleichungen wollen wir hier verzichten, da sie in der Regel umfangreiche Rechnungen zur Folge haben. Es werden in Abschnitt 4.8 exemplarisch einige von ihnen gelöst, so daß dort das Prinzip des Vorgehens veranschaulicht wird. Es sollen hier noch kurz einige Möglichkeiten angedeutet werden. Ausgehend von einer nichttrivialen Lösung der Differenzengleichung $\Delta w = 0$, die eine Darstellung der Form $w = \sum \mathbb{B}_f w + \varphi$ mit einer Gitterfunktion φ besitzt, lassen sich durch Einsetzen dieser Anteile in verschiedene Gleichungen und anschließende Summation Aussagen über das Auftreten spezieller singulärer Anteile der Koeffizienten u_j gewinnen. Da es aber in der Regel ausreicht, den Term mit der dominierenden Singularität zu kennen, welcher sich in der Regel aus der rechten Seite ermitteln läßt, wollen wir auf die Herleitung dieses Verfahrens verzichten. Es soll abschließend noch eine Möglichkeit angegeben werden, wie die Koeffizienten λ_j der Eigenwertentwicklung aus den anderen Größen berechnet werden können.

Wegen der Normierungsbedingung $b_n(u_n, u_n) = 1$ ist $\lambda_n = a_n(u_n, u_n)$. Setzt man hier die Darstellung von u_n ein, wendet die Bilinearformentwicklung (1.2.3) für a_n an und sortiert nach Potenzen von $\frac{1}{n}$, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich eine Gleichung für λ_1 :

$$(4.5.15) \quad \lambda_1 = \sum_{\substack{i, k \in J \\ i+j+k=1}} \sum_{\substack{j \in I \\ k+j, p}} a_j(u_i, u_k) .$$

Setzt man hier noch die Darstellung (4.4.20) von a_j ein, so ergibt sich schließlich ein ähnlicher Ausdruck wie in (4.5.11). Auf die erneute Angabe dieser Formel wollen wir hier verzichten und wenden uns nun den Lösungsverfahren für die Gleichungen zu.

4.6 Lösung inhomogener Eigenwertaufgaben mit nichtintegrierbarer rechter Seite

Die Gleichung (4.5.3) des letzten Abschnitts läßt sich auf die vereinfachte Form

$$(4.6.1) \quad \begin{aligned} -\Delta v - \lambda v &= \mu u + f && \text{in } \overset{\circ}{\Omega} \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \setminus \{0\} \end{aligned}$$

bringen. Dabei ist μ ein Parameter, u eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert λ und $f \in C(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, analytisch in Ω mit der Eigenschaft, daß f in der Nähe der Ecke 0 endlich viele logarithmische bzw. algebraische Singularitäten besitzt. Gesucht wird eine Lösung v , die bei 0 ein Verhalten wie $O(r^2 f(r, \theta))$ besitzt. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Es wird eine Funktion v_0 konstruiert, welche in U_0 die Singularität von f reproduziert (in (4.6.1)). Sie wird zu einer geeigneten Funktion $\bar{v}$ auf $\bar{\Omega}$ fortgesetzt. Der Ansatz $v = \bar{v} + w$ liefert dann eine Differentialgleichung für w mit stetiger rechter Seite, die dann im üblichen Sinne lösbar ist.

Zunächst wird folgender Spezialfall betrachtet :

Sei $h(r, \theta) = (\sqrt{\lambda} r)^\beta (\log \sqrt{\lambda} r)^m \varphi(\theta)$; es wird eine Lösung gesucht, die in U_0 die Singularität von h erzeugt.

$$(4.6.2) \quad \begin{aligned} -\Delta w_0 - \lambda w_0 - h &\in C(\overline{U}_0) \\ w_0(r, 0) &= w_0(r, \alpha\pi) = 0 \text{ für } r > 0. \end{aligned}$$

Die Funktion φ wird dabei als stetig vorausgesetzt.

Dazu machen wir folgenden Ansatz :

$$(4.6.3) \quad w_0(r, \theta) = \sum_{j=0}^{m+1} [(\sqrt{\lambda}r)^{\beta+2} (\log \sqrt{\lambda}r)^j \varphi_j(\theta) + h_j(r, \theta)]$$

Differentiation beider Seiten liefert :

$$(4.6.4) \quad -\Delta w_0(r, \theta) - \lambda w_0(r, \theta) = \\ - \sum_{j=0}^{m+1} \{ \lambda (\log \sqrt{\lambda}r)^{j-2} (\sqrt{\lambda}r)^{\beta} j(j-1) \varphi_j(\theta) \\ + \lambda (\log \sqrt{\lambda}r)^{j-1} (\sqrt{\lambda}r)^{\beta} 2j(\beta+2) \varphi_j(\theta) \\ + \lambda (\log \sqrt{\lambda}r)^j (\sqrt{\lambda}r)^{\beta} [(\beta+2)^2 \varphi_j(\theta) + \varphi_j''(\theta)] \\ + \lambda (\log \sqrt{\lambda}r)^j (\sqrt{\lambda}r)^{\beta+2} \varphi_j(\theta) + \Delta h_j(r, \theta) + \lambda h_j(r, \theta) \} \\ \stackrel{!}{=} (\sqrt{\lambda}r)^{\beta} (\log \sqrt{\lambda}r)^m \varphi(\theta)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man folgendes System zur Bestimmung der Funktionen φ_j und h_j :

$$(4.6.5) \quad (\beta+2)^2 \varphi_{m+1} + \varphi_{m+1}'' = 0 \\ (\beta+2)^2 \varphi_m + \varphi_m'' = -\frac{1}{\lambda} \varphi - 2(m+1)(\beta+2) \varphi_{m+1} \\ (\beta+2)^2 \varphi_j + \varphi_j'' = -2(j+1)(\beta+2) \varphi_{j+1} - (j+2)(j+1) \varphi_{j+2} \\ j=0, \dots, m-1$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi_j(0) = \varphi_j(\alpha\pi) = 0 \quad j=0, \dots, m+1,$$

sowie für $j=0, \dots, m+1$

$$(4.6.6) \quad -\Delta h_j(r, \theta) - \lambda h_j(r, \theta) = \lambda (\sqrt{\lambda}r)^{\beta+2} (\log \sqrt{\lambda}r) \varphi_j(\theta) \\ h_j(r, 0) = h_j(r, \alpha\pi) = 0 \quad \text{für } r > 0.$$

Das System (4.6.5) ist nun stets lösbar. Dabei müssen zwei Fälle unterschieden werden :

(4.6.7) erster Fall

$(\beta+2)^2$ ist Eigenwert der Aufgabe

$$\varphi'' + \gamma\varphi = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi(\alpha\pi) = 0 .$$

Dann ist die Gleichung für φ_m lösbar , wenn die rechte Seite auf dem zu $(\beta+2)^2$ gehörenden Eigenraum orthogonal steht (im üblichen L_2 Skalarprodukt). Dies kann durch geeignete Wahl von φ_{m+1} erreicht werden. φ_{m+1} ist dadurch eindeutig bestimmt. Dieses Prinzip läßt sich nun sukzessive auf alle anderen Gleichungen anwenden, so daß man der Reihe nach φ_m , $\varphi_{m-1}, \dots, \varphi_0$ bestimmen kann. φ_0 ist dabei nicht eindeutig. Dies ist nicht weiter verwunderlich , denn die homogene Gleichung (4.6.1) besitzt in diesem Fall eine nichtverschwindende Lösung in U_0 , die sich für $r \rightarrow 0$ wie $O(r^{\beta+2})$ verhält , nämlich

$$J_{(\beta+2)}(\sqrt{\lambda}r)\sin((\beta+2)\theta).$$

Ist $\beta+2$ eine negative ganze Zahl , so ist die Besselfunktion $J_{\beta+2}$ durch die Neumannsche Funktion $Y_{\beta+2}$ zu ersetzen.

(4.6.8) zweiter Fall

$(\beta+2)^2$ ist kein Eigenwert obiger Aufgabe.

Dann ist jede der Gleichungen eindeutig lösbar mit $\varphi_{m+1} \equiv 0$.

Als nächstes muß die Gleichung (4.6.6) für h_j gelöst werden. Es kann nun für h_j derselbe Ansatz (4.6.3) gemacht werden mit β ersetzt durch $\beta+2$ und m ersetzt durch j . Wiederholte Anwendung dieses Prinzips liefert schließlich eine Gleichung , bei der die rechte Seite stetig in $\overline{K}_\alpha$ ist (also auch in U_0).

Da sich dieses Verfahren für alle Anteile von f durchführen läßt, ist folgendes Lemma gezeigt:

(4.6.9) Lemma

Es existiert eine Funktion $v_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, so daß
 $g := \Delta v_0 + \lambda v_0 + f \in C(\overline{U}_0)$ und $v_0(r, 0) = v_0(r, \alpha\pi) = 0$
 in U_0 .

Für spezielle rechte Seiten f läßt sich sogar eine Lösung in K_α angeben. Sei etwa $f(r, \theta) = (\sqrt{\lambda}r)^\beta \sin \gamma \theta$. Dann ist die Funktion

$$w_0(r, \theta) = s_{\beta+1, \gamma}(\sqrt{\lambda}r) \sin \gamma \theta$$

Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta w_0 - \lambda w_0 &= f \quad \text{in } K_\alpha \\ w_0 &= 0 \quad \text{auf } \partial K_\alpha \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $s_{\beta+1, \gamma}$ eine Lommelsche Funktion (Bateman 7.5.5).

Man verifiziert dies durch Einsetzen.

Mit Hilfe von Lemma (4.6.9) läßt sich nun eine Lösung von (4.6.1) konstruieren. Setzt man $S_1 := \{P \in K_\alpha \mid |P| \leq R_1\} \subset U_0$ und $S = \{P \in S_1 \mid |P| \leq R\}$ für ein festes $0 < R < R_1$ und wählt eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\Phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$(4.6.10) \quad \Phi(P) = \begin{cases} 1 & \text{für } P \in S \\ 0 & \text{für } P \notin S_1 \end{cases},$$

so lassen sich damit in U_0 definierte Funktionen auf Ω fortsetzen. Sei v_0 wie in Lemma (4.6.9) gegeben und $\overline{v} : \overline{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$(4.6.11) \quad \overline{v}(P) = \begin{cases} \Phi(P) v_0(P) & P \in S_1 \\ 0 & P \notin S_1 \end{cases}.$$

Dann ist $\bar{g} := f + \Delta \bar{v} + \lambda \bar{v}$ in $C(\bar{\Omega})$. Der Ansatz $v = \bar{v} + w$ führt dann zu der Differentialgleichung

$$(4.6.12) \quad -\Delta w - \lambda w = \mu u + \bar{g} \quad \text{in } \Omega \\ w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Wegen der Einfachheit des Eigenwerts λ ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung $w \in C_2(\overset{\circ}{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ die Orthogonalitätsrelation

$$(4.6.13) \quad \iint_{\Omega} (\mu u + \bar{g}) u \, dx \, dy = 0 \quad \text{d.h.} \quad \mu = - \iint_{\Omega} \bar{g} u \, dx \, dy .$$

Damit ist die Existenz einer Lösung v von (4.6.1) gezeigt, die in U_0 ein Verhalten wie $O(r^{2-\epsilon} g(r, \theta))$ besitzt.

Wir wollen nun die Bedingung (4.6.13) etwas genauer betrachten, d.h. es soll untersucht werden, welchen Einfluß das Vorhandensein von Singularitäten auf diese Orthogonalitätsrelation hat. Dazu leiten wir zunächst für die Funktion v in S_1 eine Entwicklung her, die der Darstellung von u mit Besselfunktionen entspricht. v ist für $0 < r < R_1$ stetig in θ mit den Randbedingungen $v(r, 0) = v(r, \alpha\pi) = 0$ und kann daher in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$(4.6.14) \quad v(r, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(\sqrt{\lambda} r) \sin \frac{j}{\alpha} \theta .$$

Wir übernehmen nun die Herleitung einer Differentialgleichung für v_j aus Strang/Fix [1973] Kap. 8.1 und erhalten:

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \quad \bigwedge_{0 < t < R_1} \quad -t^2 v_j''(t) - t v_j'(t) + \left(\left(\frac{j}{\alpha} \right)^2 - t^2 \right) v_j(t) = t^2 f_j(t) \\ \text{mit} \quad f_j(t) = \frac{2}{\lambda \alpha \pi} \int_0^{\alpha \pi} (\mu u + f) \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}, \theta \right) \sin \frac{j}{\alpha} \theta \, d\theta .$$

Dies ist eine inhomogene Besselsche Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch
(Bateman 7.2.8) :

$$(4.6.15) \quad v_j(t) = \frac{1}{c_j} \left\{ J_{j/\alpha}(t) \int_{\sqrt{\lambda R}}^t J_{-j/\alpha}(s) f_j(s) ds \right. \\ \left. - J_{-j/\alpha}(t) \int_{\sqrt{\lambda R}}^t J_{j/\alpha}(s) f_f(s) ds \right. \\ \left. + \Lambda_j(v) J_{j/\alpha}(t) - \Psi_j(v) J_{-j/\alpha}(t) \right\} .$$

Dabei ist die Besselfunktion $J_{-\nu}$ für ganzzahliges ν durch die Neumannsche Funktion Y_ν zu ersetzen. Die Funktion $\mathbb{R}_j(t) = \frac{1}{t} c_j$ ist gerade die Wronskideterminante der Lösungen $J_{j/\alpha}$ und $J_{-j/\alpha}$ (bzw. $Y_{-j/\alpha}$)

$$(4.6.16) \quad c_j = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \sin \frac{j}{\alpha} \pi & \text{falls } \frac{j}{\alpha} \notin \mathbb{N} \\ -\frac{2}{\pi} & \text{falls } \frac{j}{\alpha} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die Koeffizienten $\Psi_j(v)$ sind frei wählbare Parameter und beeinflussen das Verhalten von v in der Nähe der 0. Da sich $v_j(t)$ in S_1 wie $O(t^{2-\epsilon} f(t)) + O(t^{j/\alpha}) + O(t^{-j/\alpha})$ verhält (ev. mit einem logarithmischen Anteil im ersten Term), läßt sich durch die Festsetzung

$$\Psi_j(v) = 0 \text{ falls } j \geq j_0 (\text{geeignet})$$

das gewünschte Verhalten von v in U_0 erzeugen.

Diese Entwicklung (4.6.14) von v wird nun in die Relation (4.6.13) eingesetzt. Da v Lemma (4.6.9) erfüllt, kann in (4.6.11) v_0 durch v ersetzt werden, d.h. die im Anschluß an (4.6.11) definierte Funktion $\bar{g}$ stimmt in S_1 mit $-u$ überein. Durch Anwendung der 2. Greenschen Formel ergibt sich dann für u der folgende Ausdruck ($\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet Differentiation in Richtung der äußeren Normalen)

$$\begin{aligned}
 (4.6.17) \quad \mu &= - \int_{\Omega \setminus S} g u \, dx \, dy + \mu \int_S u^2 \, dx \, dy \\
 &= - \int_{\Omega \setminus S} f u \, dx \, dy + \int_{\partial(\Omega \setminus S)} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} u \right) (s) \, ds + \mu \int_S u^2 \, dx \, dy \\
 &= - \int_{\Omega \setminus S} f u \, dx \, dy + R \int_0^{\alpha\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial r} u - \frac{\partial u}{\partial r} v \right) (R, \theta) \, d\theta + \mu \int_S u^2 \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

Da die Entwicklungen gliedweise differenziert werden können, läßt sich das zweite Integral weiter umformen

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\alpha\pi} \dots &= \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda} \frac{\alpha\pi}{2} [v'_j(\sqrt{\lambda}r) J_{j/\alpha}(\sqrt{\lambda}r) - v_j(\sqrt{\lambda}r) J'_{j/\alpha}(\sqrt{\lambda}r)]|_{r=R} \Lambda_j(u) \\
 &= \frac{\alpha\pi}{2R} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(u) \Psi_j(v)
 \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$(4.6.18) \quad \mu \int_{\Omega \setminus S} u^2 \, dx \, dy = - \int_{\Omega \setminus S} f u \, dx \, dy + \frac{\alpha\pi}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(u) \Psi_j(v) .$$

Dabei ist zu beachten, daß die Reihe wegen $\Psi_j(v) = 0$ für $j \geq j_0$ endlich ist.

Wir wollen nun einige Folgerungen aus dieser Darstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Lösung von (4.6.1) angeben.

(4.6.19) Sei $f = 0$ in (4.6.1). Dann existiert für $\mu \neq 0$ eine Lösung genau dann wenn Singularitäten zugelassen werden.

Denn in diesem Fall läßt sich (4.6.18) erfüllen, indem man etwa für ein j mit $\Lambda_j(u) \neq 0$ den Parameter $\Psi_j(v)$ so wählt, daß die Beziehung (4.6.18) erfüllt ist.

Diese Folgerung werden wir später bei der Konstruktion der Koeffizienten der Entwicklungen benötigen. Sie besagt, daß eine Lösung der Differentialgleichung existiert, obwohl die rechte Seite ein Element des Eigenraums ist.

Dies steht natürlich nicht im Widerspruch zur Fredholmschen Alternative , da die Lösung v in diesem Fall wegen des Vorhandenseins von Singularitäten nicht mehr klassische (und auch nicht schwache) Lösung ist.

Weiterhin erkennt man , daß es Lösungen der homogenen Gleichung (4.6.1) gibt , die nicht im Eigenraum liegen.

(4.6.20) Sei $f = 0$ und $u = 0$ in (4.6.1) . Dann existieren Lösungen der Gleichung mit Singularitäten bei 0.

Denn notwendig und hinreichend ist in diesem Fall die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j(v) \Lambda_j(u) = 0 ,$$

die sich durch geeignete Wahl der Ψ_j stets erfüllen läßt.

Es ließen sich noch eine Reihe von Folgerungen anschließen , auf die wir jedoch verzichten wollen , da sie nicht in Zusammenhang mit unserer Arbeit stehen. Wir begnügen uns hier mit dem Nachweis , daß die Gleichung (4.6.1) stets Lösungen im Sinne der Aufgabenstellung von Abschnitt 4.5 besitzt.

Im nächsten Abschnitt sollen nun die diskreten Gleichungen (4.5.4) untersucht werden.

4.7 Lösung diskreter Gleichungen

Für die im Abschnitt 4.5 aufgetretenen Gleichungen der Form

$$[Au, \varphi] = [f, \varphi]$$

soll hier die Frage der Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung von Lösungen untersucht werden. Diese Gleichungen sind äquivalent zur Differenzengleichung

$$\begin{aligned} (4.7.1) \quad Au(P) &= f(P) \quad \text{für } P \in \overset{\circ}{K}_{\alpha, d} \\ u(P) &= 0 \quad \text{für } P \in \partial K_{\alpha, d} . \end{aligned}$$

Durch den Operator A wird in kanonischer Weise eine unendliche symmetrische Matrix $\mathcal{U}$ induziert, deren Zeilen und Spalten finit sind und die auf Vektoren $(u(P))_{P \in \overset{\circ}{K}_{\alpha, d}}$ angewandt werden kann. Die Lösung der Gleichung (4.7.1) steht also im Zusammenhang mit der Invertierung der Matrix $\mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ jedoch keine der Eigenschaften erfüllt, die etwa die Existenz einer Inversen garantiert, deren Zeilen und Spalten eine konvergente Quadratsumme besitzen (vgl. Hellinger/Toeplitz Abschnitt II c), müssen wir uns einen geeigneten Raum konstruieren, um Existenz und Eindeutigkeit zu sichern.

Die Punkte von $K_{\alpha, d}$ lassen sich als Eckpunkte einer Triangulierung $\mathfrak{T}$ von K_{α} interpretieren (siehe (3.3.31)). Für jedes Element $T \in \mathfrak{T}$ und $u : K_{\alpha, d} \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$u_T := (u(P), u(Q), u(R))^T \in \mathbb{R}^3,$$

wenn P, Q, R die Eckpunkte von T sind. u läßt sich außerdem in kanonischer Weise zu einer stückweise (d.h. für jedes $T \in \mathfrak{T}$) linearen Funktion auf K_{α} fortsetzen. Diese Fortsetzung bezeichnen wir mit ru .

Unter der Voraussetzung der Existenz definieren wir nun eine symmetrische Bilinearform durch

$$\begin{aligned}
 (4.7.2) \quad [u,v]_A &:= \iint_{K_\alpha} ru \frac{\partial}{\partial x} rv + \frac{\partial}{\partial y} ru \frac{\partial}{\partial y} rv dx dy \\
 &= \sum_{T \in \mathfrak{T}} \iint_T ru \frac{\partial}{\partial x} rv + \frac{\partial}{\partial y} ru \frac{\partial}{\partial y} rv dx dy \\
 &= \sum_{T \in \mathfrak{T}} u_T^T S u_T
 \end{aligned}$$

mit der Element-Stiffnessmatrix S (unabhängig von T) .

Diese symmetrische Matrix S besitzt folgende Form (Schwarz [1980] Abschnitt 2.59)

$$(4.7.3) \quad S = \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} Y^T Y & -Y^T(X+Y) & X^T Y \\ -Y^T(X+Y) & (X+Y)^T(X+Y) & -X^T(X+Y) \\ X^T Y & -X^T(X+Y) & X^T X \end{pmatrix}$$

wenn für die Eckpunkte P, Q, R von T gilt : $Q = P + X$, $R = Q + Y$ (siehe auch (3.5.5) ff.).

S ist positiv semidefinit mit einem Eigenwert 0 zum Eigenvektor $e := \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ und zwei positiven Eigenwerten

$0 < \lambda_1(S) < \lambda_2(S)$. Der Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt $[u,v]_A$ und dem Differenzenoperator A ist gegeben durch

$$(4.7.4) \quad [u,v]_A = [u, Av] = [Av, u]$$

wenn etwa u und v auf $\partial K_{\alpha,d}$ verschwinden und u oder v finit ist , d.h. für hinreichend großes P verschwindet.

Sei nun $[u,u]_A = 0$. Dann ist für beliebiges $T \in \mathfrak{T}$ $u_T^T S u_T = 0$ und somit u_T ein Vielfaches von e , d.h. konstant in T . Also ist u auch konstant in $K_{\alpha,d}$. Daher wird durch folgende Definition ein normierter linearer Raum erklärt :

(4.7.5) Definition

$$L_1^0(K_{\alpha,d}) := \{u: K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R} \mid u|_{\partial K_{\alpha,d}} \equiv 0, [u,u]_A < \infty\}.$$

Wir werden im folgenden diesen Raum kurz mit L_1^0 bezeichnen.

Für die späteren Betrachtungen ist noch eine zu $\|u\|_A := [u,u]_A^{1/2}$ äquivalente Norm nützlich. Setzt man

$$(4.7.6) \quad [u,v]_D := \sum_{T \in \mathfrak{T}} u_T^T D v_T$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

so ist D positiv semidefinit mit demselben Eigenvektor e zum Eigenwert 0. Daher ist die durch $[\ , \]_D$ induzierte Norm $\| \ \|_D$ äquivalent zu $\| \ \|_A$.

Wegen $u_T^T D u_T = (u(P) - u(Q))^2 + (u(P) - u(R))^2 + (u(Q) - u(R))^2$ ist

$$(4.7.7) \quad [u,u]_D = 2 \sum_{P \in K_{\alpha,d}} \sum_{Q \in N(P)} (u(P) - u(Q))^2$$

mit $N(P) := \{\text{Nachbarpunkte von } P\}$,

d.h. die Punkte aus $K_{\alpha,d}$, die mit P in einem gemeinsamen Dreieck $T \in \mathfrak{T}$ liegen (vgl. Abschnitt 3.5).

Es soll nun gezeigt werden, daß unter geeigneten Voraussetzungen an f (Wachstumsbedingung für $|P| \rightarrow \infty$) die Aufgabe (4.7.1) in L_1^0 stets eindeutig lösbar ist. Dazu benötigen wir einige Eigenschaften des Raums L_1^0 .

(4.7.8) Satz

L_1^0 ist ein Hilbertraum, in dem Punktfunktionale stetig sind.

Beweis :

Wir zeigen zuerst die Vollständigkeit von L_1^0 .

Sei u^n Cauchyfolge in L_1^0 und $w_T^n := u_T^n - (e^T u_T^n) e$.

w_T^n ist dann Cauchyfolge in $\mathbb{R}^3$, denn

$$\begin{aligned} (w_T^n - w_T^m)^T (w_T^n - w_T^m) &\leq \frac{1}{\lambda_1(S)} \sum_{T \in \mathfrak{T}} (w_T^n - w_T^m)^T S (w_T^n - w_T^m) \\ &= \frac{1}{\lambda_1(S)} \|u^n - u^m\|_A^2. \end{aligned}$$

Für jedes T existiert also ein $w_T \in \mathbb{R}^3$ mit $w_T^n \rightarrow w_T$ für $n \rightarrow \infty$.

Sei nun T ein Dreieck mit den Eckpunkten P, Q, R und es gelte

$$u^n(P) \rightarrow u(P), \quad u^n(Q) \rightarrow u(Q),$$

d.h. u^n möge in zwei Punkten von T konvergieren. Dies ist beispielsweise für alle Dreiecke richtig, die wenigstens zwei Randpunkte besitzen.

Dann konvergiert u^n auch im dritten Punkt R , denn es gilt

$$u^n(R) = \frac{3}{2} w_T^n(R) + \frac{1}{2} u^n(P) + \frac{1}{2} u^n(Q) \rightarrow \frac{3}{2} w_T(R) + \frac{1}{2} u(P) + \frac{1}{2} u(Q).$$

Sei nun T ein beliebiges Dreieck und $T_1, \dots, T_M$ eine Folge in $\mathfrak{T}$ mit der Eigenschaft :

T_1 hat zwei Randpunkte und $T_M = T$

T_i und T_{i+1} besitzen zwei gemeinsame Eckpunkte, $i=1, \dots, M-1$.

Dann erhält man mit obiger Aussage, daß u^n in jedem Eckpunkt dieser Dreiecke konvergiert. Da T beliebig war, hat man die Konvergenz von u^n gegen eine Gitterfunktion $u : K_{\alpha, d} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf dem Rand verschwindet.

Es ist also noch zu zeigen, daß u in L_1^0 ist, d.h. $[u, u]_A < \infty$. Dies geschieht wie etwa im Beweis der Vollständigkeit von l_2 (vgl. Wloka §7.5).

Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$, so daß $\|u^n - u^m\|_A < \epsilon$ falls $n, m > N$. Dann gilt für jede beliebige endliche Teilmenge $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{X}$

$$\sum_{T \in \mathfrak{x}} (u_T^n - u_T^m)' S(u_T^n - u_T^m) \leq \|u^n - u^m\|_A^2 < \epsilon^2.$$

Bildet man hier wegen der punktweisen Konvergenz von u^n gegen u den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, so ergibt sich

$$\sum_{T \in \mathfrak{x}} (u_T - u_T^m)' S(u_T - u_T^m) \leq \epsilon^2.$$

Da dies für beliebige endliche Teilmengen von $\mathfrak{x}$ richtig ist, gilt auch $\|u - u^m\|_A \leq \epsilon^2$, d.h. $u - u^m \in L_1^0$ und somit auch $u = u^m + (u - u^m)$. Damit ist die Vollständigkeit von L_1^0 gezeigt.

Aus der soeben bewiesenen Tatsache, daß Normkonvergenz die punktweise Konvergenz impliziert, folgt sofort die Stetigkeit der Punktfunktionale und damit die Behauptung des Satzes.

Wir wollen nun eine Abschätzung für die Normen der Punktfunktionale angeben.

(4.7.9) Lemma

Sei $f_P : L_1^0 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_P(u) = u(P)$ für $P \in \mathring{K}_{\alpha, d}$. Dann gilt

$$\forall_{C>0} \quad \bigwedge_{u \in L_1^0} |f_P(u)| \leq C |P|^{1/2} \|u\|_A$$

und C ist unabhängig von P und u .

Beweis :

Sei $Q_0, \dots, Q_M$ eine Folge von Punkten mit der Eigenschaft :

$Q_0 \in \partial K_{\alpha, d}$ und $Q_M = P$

$Q_i \in N(Q_{i+1})$, d.h. Q_i ist Nachbarpunkt von Q_{i+1} .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } |u(P)| &\leq \sum_{i=0}^{M-1} |u(Q_i) - u(Q_{i+1})| \\ &\leq M^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{M-1} (u(Q_i) - u(Q_{i+1}))^2 \right)^{1/2} \\ &\leq M^{1/2} \|u\|_D \\ &\leq C_1 M^{1/2} \|u\|_A , \end{aligned}$$

da die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_D$ äquivalent sind.

Es läßt sich stets eine Folge von Punkten angeben , so daß

die Anzahl M gilt : $M \leq C_2 \operatorname{dist}(P, \partial K_{\alpha, d}) = C_2 \min\{|P - Q| \mid Q \in \partial K_{\alpha, d}\}$

mit C_2 unabhängig von P . Dies ergibt eine erste Abschätzung

$$(4.7.10) \quad |u(P)| \leq C_1 C_2 \operatorname{dist}(P, \partial K_{\alpha, d})^{1/2} \|u\|_A .$$

Der Abstand vom Rand läßt sich durch $|P|$ abschätzen , so daß die Behauptung des Lemmas gezeigt ist.

Dieses Ergebnis läßt sich noch verbessern , wenn man geeignete diskrete Greensche Funktionen wie bei Bramble/Hubbard/Zlamal [1968] benutzt. Da für unsere Zwecke Lemma (4.7.9) ausreichend ist , wollen wir auf den Beweis verzichten und nur die verbesserte Abschätzung angeben .

$$(4.7.11) \quad |u(P)| \leq C (\log |P|)^{1/2} \|u\|_A \quad (\text{o.E.d.A. } |P| \geq 1) .$$

Als nächstes wollen wir einen Existenzsatz für eine diskrete Greensche Funktion formulieren , d.h. eine Inverse der durch A induzierten Matrix $\mathcal{M}$, deren Zeilen und Spalten in L_1^0 liegen .

(4.7.12) Satz

Es existiert eine symmetrische Greensche Funktion

$$G : K_{\alpha,d} \times K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Für $P \in K_{\alpha,d}$ ist $G(P, \cdot) \in L_1^0$ und genügt der Gleichung

$$AG(P, Q) = \delta_{PQ} \quad \text{für } Q \in \overset{\circ}{K}_{\alpha,d}$$

$$G(P, Q) = 0 \quad \text{für } Q \in \partial K_{\alpha,d}.$$

Beweis :

Sei für $P \in \overset{\circ}{K}_{\alpha,d}$ das dazugehörige Punktfunktional f_P wie in Lemma (4.7.9) gegeben. f_P ist stetig und daher existiert nach dem Satz von Riesz ein Element $u_P \in L_1^0$ mit der Eigenschaft :

$$\bigwedge_{v \in L_1^0} [u_P, v]_A = f_P(v) = v(P).$$

Setzt man speziell $v = \delta_Q$ mit $\delta_Q(P) = \delta_{PQ}$, so folgt aus (4.7.4)

$$\delta_{PQ} = [u_P, \delta_Q] = Au_P(Q).$$

Wegen $u_P(Q) = [u_P, u_Q]_A = [u_Q, u_P]_A = u_Q(P)$ erfüllt dann die Funktion $G(P, Q) := u_P(Q)$ die Behauptung des Satzes.

Im Anhang findet sich eine Darstellung einer zu diesem Problem gehörenden Singularitätenfunktion $S(P, Q)$.

Der nächste Satz gibt nun Auskunft über Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung einer Lösung von (4.7.1).

(4.7.13) Satz

Das durch $f : K_{\alpha,d} \rightarrow \mathbb{R}$ induzierte lineare Funktional

$$F_f(u) := [u, f] \text{ sei wohldefiniert und stetig in } L_1^0.$$

Dann gibt es genau eine Lösung von (4.7.1) in L_1^0 und es gilt :

$$u(P) = \sum_{Q \in \overset{\circ}{K}_{\alpha,d}} G(P, Q) f(Q).$$

Beweis :

Nach dem Satz von Riesz gibt es genau ein Element $u \in L_1^0$, das der Gleichung $[u, v]_A = [f, v]$ für $v \in L_1^0$ genügt. Setzt man hier $v = \delta_P$ (wie im Beweis von Satz (4.7.12)), so ergibt sich die Differenzengleichung (4.7.1) und somit Existenz und Eindeutigkeit. Setzt man $v = G(P, \cdot)$ für $P \in \tilde{K}_{\alpha, d}$, so erhält man genau die angegebene Lösungsdarstellung.

Stellt man Bedingungen an das Verhalten von $f(P)$ für $|P| \rightarrow \infty$, so ist das Funktional $F_f(v) = [f, v]$ stetig in L_1^0 , und die Gleichung (4.7.1) besitzt eine eindeutige Lösung in L_1^0 .

(4.7.14) Lemma

Für $|P| \rightarrow \infty$ sei $f(P) = O(|P|^{s(f)})$ mit $s(f) < -2$.

Dann ist F_f stetig in L_1^0 .

Beweis :

Es ist $F_f(v) = [f, v] = \sum_{P \in \tilde{K}_{\alpha, d}} f(P)v(P)$. Setzt man hier die Abschätzung (4.7.11) ein, so ergibt sich :

$$|F_f(v)| \leq C_1(f) C \sum_{P \in \tilde{K}_{\alpha, d}} |P|^{s(f)} (\log |P|)^{1/2} \|v\|_A = C_2(f) \|v\|_A.$$

Dies ist die Behauptung.

Benützt man statt der nicht bewiesenen Abschätzung (4.7.11) die Aussage von Lemma (4.7.9), so ist hinreichend für die Stetigkeit von F_f : $s(f) < -5/2$.

Dies ist in den späteren Beispielen erfüllt, so daß wir hier nicht weiter darauf eingehen wollen.

Abschließend wollen wir noch Beispiele für Funktionen aus L_1^0 angeben.

(4.7.15) Lemma

Sei $u(x,y) = r^\beta \log^m g(\theta)$ für $r > 0$ und $u(0) = 0$

mit $g \in C_1[0, \alpha\pi]$, $g(0) = g(\alpha\pi) = 0$ und $\beta < 0$.

Dann ist u in L_1^0 .

Beweis :

Es ist zu zeigen, daß $[u, u]_A < \infty$ gilt.

Sei dazu $T \in \mathfrak{T}$ und $R_T \in T$ (etwa R_T = Schwerpunkt von T) .

Es genügt, Dreiecke T mit $|R_T| > \kappa$ (κ hinr. groß) zu betrachten.

Dann ist für $P \in T$:

$$\nabla(ru)(P) = \nabla u(P) + o(|R_T|^{\beta-1+\epsilon}) \text{ für beliebiges } \epsilon > 0.$$

und damit

$$\iint_T (\nabla ru)^T (\nabla ru) dx dy = \iint_T \nabla u^T \nabla u + O(|R_T|^{2\beta-2+\epsilon}), \quad \epsilon > 0 \text{ beliebig.}$$

Summation über alle T liefert dann wegen $\beta < 0$ die Behauptung.

4.8 Beispiele für nichtganzzahlige Entwicklungen

Wir betrachten wieder das L-Gebiet (4.4.1) mit der dort angegebenen Triangulierung und versuchen, die vermuteten Entwicklungen der Form (0.1.9) für die drei kleinsten Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 zu bestätigen. Dazu müssen die Gleichungen für die Koeffizienten aufgestellt und gelöst werden. Dies soll in ausführlicher Form für den kleinsten Eigenwert λ_1 geschehen.

Wir gehen zunächst von einer beliebigen Indexmenge J mit Elementen $(0,0)$, $(2/3,\mu)$, $(4/3,\mu)$, $(2,\mu)$, ... ($\mu \geq 0$) aus und versuchen, diejenigen Koeffizienten (u_j, λ_j) zu bestimmen, die nicht verschwinden. Für jeden Index $j \in J$ werden die in Abschnitt 4.5 hergeleiteten Gleichungen angegeben und gelöst. Zur Vereinfachung der Schreibweise verzichten wir jedoch stets auf die zusätzliche Angabe der Randbedingungen. Wir beschränken uns weiterhin auf die Koeffizienten $j \in J$ mit $j_1 \leq 2$, da hier alle für unsere Aufgabenstellung typischen Probleme auftreten. Dies betrifft insbesondere die Existenz/Nichtexistenz von Singularitäten in den Lösungen oder logarithmischen Anteilen in der Entwicklung.

Es werden nun der Reihe nach die Gleichungen aufgestellt und ihre Lösungen angegeben.

$$(4.8.1) \quad 1 = (0,0)$$

$$(4.5.3) : \quad -\Delta u'_{0,0} - \lambda_{0,0} u'_{0,0} = 0$$

$$(4.5.12) : \quad B_0(u_{0,0}^2) = 1$$

$$(4.5.4) : \quad A\varphi_{0,0} = 0$$

Dies ist gerade die Eigenwertaufgabe (4.1.1) mit Lösung

$$u_{0,0} = (u,0), \quad \varphi_{0,0} = 0, \quad \text{und} \quad \lambda_{0,0} = \lambda.$$

In den folgenden Formeln sollen anstelle von $u'_{0,0}$ und $\lambda_{0,0}$ die Bezeichnungen u und λ verwendet werden.

$$(4.8.2) \quad l = (2/3, 0)$$

$$(4.5.3) : \quad -\Delta u'_{2/3,0} - \lambda u'_{2/3,0} = \lambda_{2/3,0} u$$

$$(4.5.13) : \quad \mathfrak{B}_0(u'_{2/3} u) = 0$$

$$(4.5.4) : \quad A[\varphi_{2/3,0} + \sum_{\substack{f_1+i_1=2/3 \\ f_2 \geq 0}} \mathfrak{P}_{f_1 i_1} u'_{1,0}] = 0$$

Für das Verhalten von $u'_{2/3,0}$ bei 0 ist nach (4.4.14) zu fordern :

$$s(u'_{2/3,0}) + 2/3 > 0 \quad \text{d.h.} \quad s(u'_{2/3,0}) \geq 0.$$

Für die Lösung ist daher eine Singularität bei 0 nicht zulässig , so daß die Gleichung nach (4.6.19) nur für $\lambda_{2/3,0} = 0$ lösbar ist mit $u'_{2/3,0} = \kappa u$. Wegen (4.5.13) ist $\kappa = 0$ also auch $u'_{2/3,0} = 0$.

Zur Lösung von (4.5.4) setzen wir

$$R_{2/3} := \mathfrak{P}_{2/3,0}(u) = \Lambda_1(u) r^{2/3} \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{1}{\Gamma(5/3)}$$

$$\text{und } \psi_{2/3,0} := \varphi_{2/3,0} + \sum_{\substack{f_1+i_1=2/3 \\ f_2 \geq 0, i_1 > 0}} \mathfrak{P}_{f_1 i_1} u'_{1,0}$$

Damit schreibt sich (4.5.4) in der Form

$$A\psi_{2/3,0} = -AR_{2/3} =: f$$

Wegen $f(P) = O(|P|^{-2/3-4})$ für $|P| \rightarrow \infty$ existiert nach Lemma (4.7.14) und Satz (4.7.13) eine eindeutig bestimmte Lösung $\psi_{2/3} \neq 0$ in L_1^0 . Durch die Angabe der Anteile $\mathfrak{P}_{f_1 i_1} u'_1$ in den folgenden Gleichungen ist dann $\varphi_{2/3}$ definiert.

(4.8.3) $l=(2/3,1)$

$$(4.5.3) : -\Delta u'_{2/3,1} - \lambda u'_{2/3,1} = \lambda_{2/3,1} u$$

$$(4.5.13) : \theta_0(u'_{2/3,1} u) = 0$$

$$(4.5.4) : A[\varphi_{2/3,1} + \sum_{\substack{f_1+i_1=2/3 \\ f_2 \geq 0}} \mathbb{P}_{f,i_1} u'_{i_1,1}$$

$$+ \sum_{\substack{g_1+i_1=2/3 \\ g_2 \geq 0}} g_2 \mathbb{P}_{g,i_1} u'_{i_1,0} \log r^{-1}] = 0$$

Mit derselben Argumentation wie bei (4.8.2) ist $u'_{2/3,1} = 0$ und $\lambda_{2/3,1} = 0$.

Bezeichnet man wie bei (4.8.2) den Ausdruck in den eckigen Klammern mit $\psi_{2/3,1}$, wobei nur über die Indizes mit $i_1 > 0$ summiert wird, so ist $\psi_{2/3,1}$ wieder in L_1^0 . (4.5.4) nimmt dann die Form

$$A\psi_{2/3,1} = 0$$

an, denn in u sind keine logarithmischen Terme enthalten.

Damit ist $\psi_{2/3,1} = 0$.

Mit derselben Schlußweise zeigt man dann durch Induktion, daß alle Koeffizienten $u_{2/3,\mu}$, $\lambda_{2/3,\mu}$ für $\mu > 0$ verschwinden. Es ist also möglich, diese Indizes aus der Menge J zu entfernen.

Dieses Prinzip wird dann auch bei den nächsten Termen erfolgreich sein, so daß man tatsächlich mit einer endlichen Indexmenge J alle Gleichungen lösen kann. Man definiert sich daher die Menge J erst nach dem Lösen der Gleichungen und berücksichtigt nur Elemente, die zu nichtverschwindenden Koeffizienten gehören.

(4.8.4) $1 = (4/3, 0)$

$$(4.5.3) : -\Delta u'_{4/3,0} - \lambda u'_{4/3,0} = \lambda_{4/3,0} u$$

$$(4.5.13) : \mathbb{B}_0(u'_{4/3,0} u) = 0$$

$$(4.5.4) : A[\varphi_{4/3,0} + \sum_{\substack{f_1+i_1=4/3 \\ f_2 \geq 0}} \mathbb{P}_{f_1} u'_i] = 0 .$$

Zulässig für $u'_{4/3,0}$ sind folgende Singularitäten :

$$s(u'_{4/3,0}) + 4/3 > 0 \quad \text{d.h.} \quad s(u'_{4/3,0}) \geq -2/3 .$$

Wegen $\Lambda_1(u) \neq 0$ läßt sich für jedes $\lambda_{4/3,0} \neq 0$ eine Lösung von (4.5.3) angeben (siehe (4.6.19)) . $u'_{4/3}$ ist folglich durch die Vorgabe von $\lambda_{4/3}$ unter Berücksichtigung von (4.5.13) eindeutig bestimmt. Dies ist der wesentliche Unterschied zum Ansatz in Abschnitt 4.2 oder etwa dem von Bulirsch [1966]. Ohne zusätzliche Information können diese Koeffizienten hier nicht berechnet werden. Diese ist gegeben durch die Darstellung (4.5.15) für $\lambda_{4/3,0}$. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir nun einige Abkürzungen ein :

$$\lambda_{4/3} := \lambda_{4/3,0} , \quad u_{4/3} := u'_{4/3,0} , \quad s_{-2/3} := \mathbb{P}_{-2/3,0}(u'_{4/3,0})$$

$$\varphi_{2/3} := \varphi_{2/3,0} , \quad \psi_{2/3} := \psi_{2/3,0} , \quad \varphi_{4/3} := \varphi_{4/3,0} .$$

Die Lösung $u_{4/3}$ von (4.5.3) ist von der Form $u_{4/3} = \lambda_{4/3} u_s$, wobei u_s der Differentialgleichung

$$-\Delta u_s - \lambda u_s = u$$

genügt. u_s verhält sich dann wegen (4.6.14) in einer Umgebung der 0 wie $\Psi_1(u_s) r^{-2/3} \sin(-\frac{2}{3}\theta) + o(r)$.

Aus (4.5.15) erhält man nun die folgende Darstellung für $\lambda_{4/3}$:

$$\lambda_{4/3} = \sum_{i+j+k=4/3} a_j(u_i, u_k)$$

Mit Hilfe von (4.4.20) werden nun die einzelnen Summanden berechnet.

$$\begin{aligned} a_{0,0}((u,0),(u_{4/3},\varphi_{4/3})) &= -\mathfrak{B}_0(u_{4/3}\Delta u) + \sum_{\substack{f_1+g_1=0 \\ f_2,g_2 \geq 0}} A_0^*(\mathfrak{T}_f u_{4/3}, \mathfrak{T}_g u) \\ &= A_0^*(S_{-2/3}, R_{2/3}) = [S_{-2/3}, AR_{2/3}] . \end{aligned}$$

Denn $\mathfrak{B}_0(u_{4/3}\Delta u) = -\lambda \mathfrak{B}_0(u_{4/3}u) = 0$. Außerdem wurde die Darstellung (3.3.40) von A_0^* eingesetzt.

$$a_{0,0}((0,\varphi_{2/3}),(0,\varphi_{2/3})) = [\varphi_{2/3}, A\varphi_{2/3}]$$

$$a_{2/3,0}((u,0),(0,\varphi_{2/3})) = [AR_{2/3}, \varphi_{2/3}]$$

$$a_{4/3,0}((u,0),(u,0)) = A_0^*(R_{2/3}, R_{2/3}) = [R_{2/3}, AR_{2/3}]$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i+j+k=(4/3,0) \\ j_1 < 0}} a_j((u_i^!, \varphi_i^!), (u_k^!, \varphi_k^!)) \\ &= \sum_{\substack{f_1+g_1+k_1+i_1=4/3 \\ f_1+g_1 < 0, i_2=k_2=0}} A_0^*(\mathfrak{T}_f u_i^!, \mathfrak{T}_g u_k^!) \\ &+ \sum_{\substack{f_1+i_1+k_1=4/3 \\ f_1 < 0, i_2=k_2=0}} [\mathfrak{T}_f u_i^!, A\varphi_k] + \sum_{\substack{g_1+i_1+k_1=4/3 \\ g_1 < 0, i_2=k_2=0}} [\varphi_i, A\mathfrak{T}_g u_k^!] \\ &= \sum_{\substack{f_1+i_1=2/3 \\ i_2=0, i_1+k_1 > 4/3, k_2=0}} \sum_{g_1+k_1=2/3} [\mathfrak{T}_f u_i^!, A\mathfrak{T}_g u_k^!] \\ &+ \sum_{\substack{f_1+i_1=2/3 \\ f_1 < 0, i_2=0}} [\mathfrak{T}_f u_i^!, A\varphi_{2/3}] + \sum_{\substack{g_1+k_1=2/3 \\ g_1 < 0, k_2=0}} [\varphi_{2/3}, A\mathfrak{T}_g u_k^!] \end{aligned}$$

Alle diese Terme treten in der Darstellung von $\psi_{2/3}$ in (4.8.2) auf, so daß sich $\sum \mathfrak{T}_f u_i^!$ mit Hilfe von $\psi_{2/3}$ ausdrücken läßt.

Durch Einsetzen erhält man dann :

$$\begin{aligned} \dots &= [\text{AR}_{2/3}, \psi_{2/3} - \varphi_{2/3} - \text{S}_{-2/3}] + [\text{S}_{-2/3}, \text{A}(\psi_{2/3} - \varphi_{2/3})] \\ &+ [\psi_{2/3} - \varphi_{2/3} - \text{S}_{-2/3}, \text{A}(\psi_{2/3} - \varphi_{2/3} + \text{R}_{2/3})] \\ &+ 2[\varphi_{2/3}, \text{A}(\psi_{2/3} - \varphi_{2/3})] \\ &= -2[\text{AR}_{2/3}, \text{S}_{-2/3}] - 2[\varphi_{2/3}, \text{AR}_{2/3}] + [\text{AR}_{2/3}, \psi_{2/3}] - [\varphi_{2/3}, \text{A}\varphi_{2/3}] . \end{aligned}$$

Nun lassen sich alle Summanden zusammenfassen , wobei zu beachten ist , daß er erste und der dritte zweimal vorkommen. Man erhält schließlich :

$$\begin{aligned} \lambda_{4/3} &= [\text{R}_{2/3}, \text{AR}_{2/3}] + [\text{AR}_{2/3}, \psi_{2/3}] = [\text{R}_{2/3}, \text{AR}_{2/3}] - [\psi_{2/3}, \text{A}\psi_{2/3}] \\ &=: \Lambda_1^2(u) \text{F}_{2/3} . \end{aligned}$$

Dabei hängt der Faktor $\text{F}_{2/3}$ nur von der Funktion $r^{2/3} \sin \frac{2}{3}\theta$ ab. $\lambda_{4/3}$ verschwindet also , wenn $\Lambda_1(u) = 0$ ist. Dabei müssen wir die Frage , ob $\text{F}_{2/3} \neq 0$ ist , offenlassen , da wir die Bestätigung dieser Aussage numerischen Experimenten verdanken. Ein analytischer Nachweis ist uns bisher nicht gelungen.

Diese Darstellung von $\lambda_{4/3}$ besitzt noch einen weiteren Vorteil. Da man, ausgehend von einer Folge von Näherungen für den Eigenwert λ nicht nur diesen durch Extrapolation gut berechnen kann , sondern auch eine Approximation für $\lambda_{4/3}$ erhält , kann man über diese Formel $\Lambda_1(u)$ näherungsweise bestimmen. Notwendig ist allerdings die Kenntnis von $\text{F}_{2/3}$. Eine Diskussion von Vor- und Nachteilen dieses Verfahrens geht jedoch über den Rahmen unserer Arbeit hinaus und soll späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Es ist nun noch die Gleichung (4.5.4) zu lösen . Dazu setzen wir wie bei (4.8.2) $\psi_{4/3,0} = \varphi_{4/3,0} + \sum_{\substack{f_1+i_1=4/3 \\ f_2 \geq 0, i_1 > 0}} \mathbb{P}_{f,i} u_i^f$ und erhalten :

$$A\psi_{2/3,0} = -A\mathbb{P}_{4/3,0}(u) =: -AR_{4/3}$$

Da sich die rechte Seite wie $O(|P|^{-8/3})$ für $|P| \rightarrow \infty$ verhält , besitzt die Gleichung eine eindeutig bestimmte Lösung in L_1^0 .

$$(4.8.5) \quad 1 = (4/3, \mu) , \mu > 0$$

Wir wollen auf eine ausführliche Diskussion der Gleichungen zu diesem Index verzichten. Das Vorgehen ist wie bei (4.8.4) . Mit denselben Umformungen erhält man jedoch hier als Ergebnis $\lambda_1 = 0$, da in der Entwicklung von u keine logarithmischen Anteile auftreten. Damit ist auch $u_1 = 0$ und ebenso ψ_1 (wie oben definiert).

$$(4.8.6) \quad 1 = (2, 0)$$

$$(4.5.3) : -\Delta u'_{2,0} - \lambda u'_{2,0} = \lambda_{2,0} u - \alpha_2 u + \lambda \beta_2 u$$

$$(4.5.14) : 2\mathbb{B}_0(uu'_{2,0}) + \mathbb{B}_2(u^2) + \mathbb{B}_0(u\beta_2 u)$$

$$(4.5.4) : A[\varphi_{2,0} + \sum_{\substack{f_1+i_1=2 \\ f_2 \geq 0}} \mathbb{P}_{f,i} u_i^f] = 0$$

Wir zeigen hier zunächst die Lösbarkeit der Differenzengleichung

$$(4.5.4) . \text{ Dazu setzt man } \psi_{2,0} = \varphi_{2,0} + \sum_{\substack{f_1+i_1=2 \\ f_2 \geq 0, i_1 > 4/3}} \mathbb{P}_{f,i} u_i^f$$

und erhält

$$A\psi_{2,0} = -A\mathbb{P}_{2,0}(u) - A\mathbb{P}_{-2/3,0}(u_{4/3,0}) \quad .$$

Wegen $A\mathbb{P}_{2,0}(u)(x,y) = \kappa(u)A(r^2 \sin 2\theta) = 0$ ($\kappa(u) \in \mathbb{R}$) ist die Gleichung wie bisher lösbar.

Wir wollen hier die Differentialgleichung für $u_{2,0}$ genauer betrachten. Dazu sei $f := \lambda \beta_2 u - \alpha_2 u$ der singuläre Anteil der rechten Seite. Setzt man die Darstellung (3.5.12+13) der Differentialoperatoren α_2 und β_2 ein (mit $X = (1,0)$ und $Y = (0,1)$), so erhält man für $(x,y) \in U_0$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{12} [(\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})^2]u + \frac{1}{12}[(\frac{\partial}{\partial x})^4 + (\frac{\partial}{\partial y})^4]u \\ &= \frac{1}{4}\lambda^2 u + \frac{\lambda}{6}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y})u - \frac{1}{6}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y})^2 u \\ &= c_1(\sqrt{\lambda}r)^{-10/3}\sin\frac{10}{3}\theta + c_2(\sqrt{\lambda}r)^{-8/3}\sin\frac{8}{3}\theta + o(r^{-4/3}) \end{aligned}$$

Für eine Lösung der Differentialgleichung erhält man dann mit den Methoden von Abschnitt 4.6 in U_0 eine Darstellung

$$u_{2,0}(r,\theta) = (\sqrt{\lambda}r)^{-4/3}\varphi_1(\theta) + (\sqrt{\lambda}r)^{-2/3}\varphi_2(\theta) + o(r) .$$

Das Verhalten von $u_{2,0}$ in der Nähe der 0 wird also durch den dominierenden Term in der Entwicklung von u bestimmt. Zu erwähnen wäre hier noch , daß natürlich der Koeffizient $\lambda_{2,0}$ der Eigenwertentwicklung auftritt , da hier die rechte Seite der Gleichung nicht verschwindet.

Wir haben hier an einigen Beispielen vorgeführt , wie sich die Koeffizienten sukzessive bestimmen lassen. Bemerkenswert ist noch das Auftreten der logarithmischen Anteile. Dies ist erstmals beim nächsten Index der Fall.

$$(4.8.7) \quad 1 = (2,1)$$

$$(4.5.3) : -\Delta u_{2,1} - \lambda u_{2,1} = \lambda_{2,1} u$$

Es liegt also hier ein Fall wie bei (4.8.4) vor , bei dem durch Singularitäten Lösungen dieser Gleichung möglich sind , die nicht verschwinden.

Betrachtet man die Darstellung (4.5.15) für $\lambda_{2,1}$, so besitzt sie folgende Form

$$\lambda_{(2,1)} = \sum_{i+j+k=(4/3,1)} a_j(u_i, u_k) .$$

Hier tritt nun erstmals ein "logarithmischer" Koeffizient der Entwicklung von a_n auf:

$$\begin{aligned} a_{(2,1)}((u,0),(u,0)) &= \sum_{\substack{f_1+g_1=2 \\ f_2, g_2 \geq 0}} A_1^*(\mathbb{T}_f u, \mathbb{T}_g u) \\ &= A_1^*(\mathbb{T}_{2/3,0} u, \mathbb{T}_{4/3,0} u) + A_1^*(\mathbb{T}_{4/3,0} u, \mathbb{T}_{2/3,0} u) \\ &=: A_1^*(R_{4/3}, R_{2/3}) + A_1^*(R_{2/3}, R_{4/3}) =: \Lambda_1(u) \Lambda_2(u) \mathfrak{L}_2 . \end{aligned}$$

Wegen $p > 2$ ist

$$A_1^*(R_{4/3}, R_{2/3}) = \sum_{v=1}^5 L_{p-2}(R_{4/3} \alpha_2 R_{2/3} \cdot \psi_v) \quad (U_0 \text{ enthält } 5 \text{ Dreiecke !})$$

und kann mittels der Darstellung (2.3.11) vom L_{p-2} berechnet werden.

Setzt man dies in die Formel für $\lambda_{(2,1)}$ ein, so ergibt sich nach längerer Rechnung mit denselben Umformungen wie in (4.8.4) das Ergebnis

$$\lambda_{(2,1)} = \Lambda_1(u) \Lambda_2(u) \mathfrak{L}_2 .$$

Weitere logarithmische Anteile treten nicht auf für $l_1=2$.

Wir wollen damit die Bestimmung der Koeffizienten für den kleinsten Eigenwert abschließen. Man kann daraus ersehen, daß der konstruktive Nachweis der einzelnen Terme äußerst mühsam und umfangreich ist. Der Aufwand erhöht sich mit der Ordnung der Fehlerglieder. Es ist uns auch bisher nicht gelungen, wegen der Komplexität der Formeln und Gleichungen ein allgemeines Konstruktionsprinzip für die Koeffizienten der Entwicklung anzugeben.

Zusammenfassend kann man sagen , daß die von verschiedenen Autoren vermutete Entwicklung (0.1.4) für den kleinsten Eigenwert durch theoretische Überlegungen bestätigt werden konnte. Sie ist auch bei den Eigenfunktionen gegeben , wenn dabei ein fester Punkt aus einer vorgegebenen Triangulierung betrachtet wird. Hieraus wird ersichtlich , daß die Extrapolation bei den Eigenwerten wesentlich besser eingesetzt werden kann als bei den Funktionen. Denn in einer vorgegebenen Folge von Näherungen u_n sind nur für die Punkte zu den niedrigen Indizes n eine größere Anzahl von Werten gegeben , so daß dort gute Verbesserungen erreicht werden können. Will man jedoch an vielen Stellen Ergebnisse hoher Genauigkeit erreichen , so erreicht man schnell die Kapazitätsgrenze eines jeden Großrechners.

Abschließend soll noch auf das Konvergenzverhalten der Näherungen eingegangen werden. Beim Eigenwert erhält man den ersten Fehlerterm zum Index $(4/3, 0)$, so daß Konvergenz der Ordnung $4/3$ vorliegt. Dies stimmt genau mit den Ergebnissen von Veidinger [1977] überein. Für die Eigenfunktionen wird dort die Konvergenzordnung $(\frac{1}{n})^{2/3} \log \frac{1}{n}$ in der Maximumnorm nachgewiesen. Betrachtet man dagegen bei uns die Ordnung der punktweisen Konvergenz , so ergibt sich wie beim Eigenwert $4/3$.

Dies ist jedoch kein Widerspruch zu den Ergebnissen von Veidinger , da auch unsere nachgewiesenen Fehlerterme das dort angegebene Verhalten zeigen. So läßt sich beispielsweise der Anteil $(\frac{1}{n})^{2/3} \log \frac{1}{n} r_n u_{2,1}$ wegen der Singularität bei 0 in der Maximumnorm nur durch $(\frac{1}{n})^{2/3} \log n$ abschätzen. Für einen festgehaltenen Punkt behält dieses Fehlerglied natürlich seine

Konvergenzordnung , während sein Verhalten in der Maximumnorm wegen der Singularität bei 0 genau der Abschätzung von Veidinger genügt. Dieses Ergebnis kann man auch wie folgt interpretieren: Untersucht man die Konvergenzordnung auf einer kompakten Teilmenge von Ω in der Maximumnorm , so erhält man $4/3$, während die "globale" Ordnung nur $2/3-\epsilon$ ist . Dies entspricht auch den Resultaten von Schatz/Wahlbin [1977+1978] bei der Behandlung von Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen.

Die Überlegungen (4.8.4-7) lassen sich nun in analoger Weise auf den zweiten Eigenwert λ_2 übertragen., so daß wir auf die ausführliche (und umfangreiche) Herleitung verzichten wollen und nur das Ergebnis angeben. Benötigt wird wieder die Darstellung der Eigenfunktion u_2 mit Besselfunktionen. Hier ist nun ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem ersten Fall , denn es gilt

$$u_2(r, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(u_2) J_{4j/3}(\sqrt{\lambda_2} r) \sin \frac{4}{3} j \theta$$

Dieses Verschwinden der ungeraden Anteile läßt sich folgendermaßen begründen. Das L-Gebiet entsteht durch Spiegelung aus einem Trapez und u_2 ist die nach diesem Prinzip auf L fortgesetzte Eigenfunktion , die zum kleinsten Eigenwert dieses Gebiets gehört. Diese Eigenschaft läßt sich in der Zeichnungen des nächsten Abschnitts gut erkennen. Damit ergibt sich für die Eigenwerte folgende Entwicklung :

$$(4.8.8) \quad \lambda_n^{(2)} = \lambda_2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \lambda_2^{(2)} + \left(\frac{1}{n}\right)^{8/3} \lambda_{8/3}^{(2)} + \left(\frac{1}{n}\right)^4 \log \frac{1}{n} \lambda_{4,1}^{(2)} \\ + \left(\frac{1}{n}\right)^4 \lambda_4^{(2)} + \left(\frac{1}{n}\right)^{16/3} \lambda_{16/3}^{(2)} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{20/3}\right)$$

Dies gilt auch punktweise bei den Eigenfunktionen.

Keine Singularitäten treten dagegen bei der dritten Eigenfunktion auf, denn es ist $u_3(x,y) = 2\sin\pi x \sin\pi y$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 2\pi^2$. Nach den Ergebnissen der Abschnitte 4.2+3 sind also quadratische Fehlerentwicklungen zu erwarten.

Damit wollen wir die theoretischen Betrachtungen abschließen und im nächsten Abschnitt die hier abgeleiteten Entwicklungen numerisch bestätigen. Durch Angabe der Rechenzeit wird auch die Effizienz von Extrapolationsalgorithmen gut erkennbar.

4.9 Numerische Beispiele

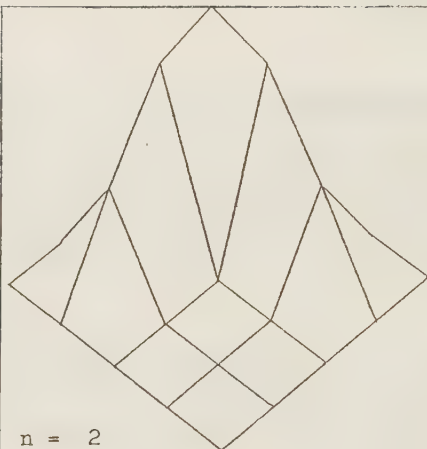
Die folgenden numerischen Berechnungen wurden an den beiden Großrechnern des Leibniz-Rechenzentrums der Bayrischen Akademie der Wissenschaften Telefunken TR 440 und CDC Cyber 175 durchgeführt.

Die aus der diskreten Gleichung (4.1.4) hervorgehende verallgemeinerte Matrix-Eigenwertaufgabe $\mathbf{u}_n \mathbf{x} = \lambda_n \mathbf{g}_n \mathbf{x}$ wurde mit dem Verfahren der symmetrischen Gruppenkoordinatenrelaxation (SGCOR) näherungsweise gelöst (siehe Schwarz [1976],[1977]). Dabei wurde zur Bestimmung der drei kleinsten Eigenwerte und -vektoren mit vier Vektoren iteriert. Als Abbruchkriterium wurde das gleichzeitige Erfülltsein folgender Bedingungen gewählt :

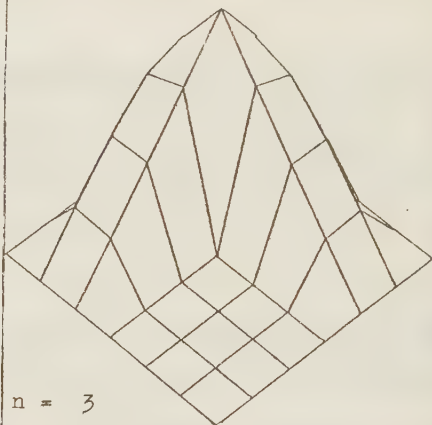
$$\begin{aligned} |\lambda_i^{(n+1)} - \lambda_i^{(n)}| &\leq 10^{-9} & i=1,2,3 \\ \|u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}\|_{\infty} &\leq 10^{-9} & i=1,2,3 \\ \|\mathbf{u}_n u_i^{(n+1)} - \lambda_i^{(n+1)} \mathbf{g}_n u_i^{(n+1)}\|_{\infty} &\leq 10^{-9} & i=1,2,3. \end{aligned}$$

Diese relativ hohe Genauigkeit mußte gewählt werden , damit die so berechneten Iterierten $\lambda_i^{(n)}$ und $u_i^{(n)}$ mit den exakten Lösungen der diskreten Gleichungen in 4 - 5 Stellen übereinstimmen. Nur dadurch ist es möglich , die Extrapolation sinnvoll einzusetzen. Als Verfahren zur sukzessiven Elimination der Fehlerterme wurde hier ein verallgemeinertes Aitken-Neville Schema verwendet (Lyness [1976a] , Havie [1979]).

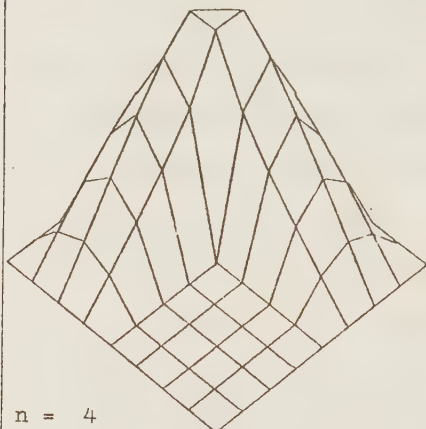
Die folgenden Abbildungen sind perspektivische Zeichnungen der diskreten Näherungen für die erste Eigenfunktion . Dabei ist zu beachten , daß aus programmtechnischen Gründen die Funktionen auf ein entsprechendes Quadrat fortgesetzt wurden (Funktionswert 0).



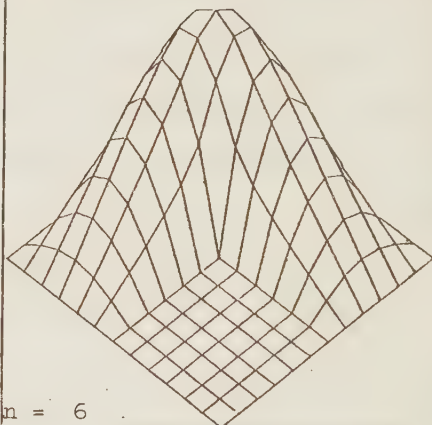
$n = 2$



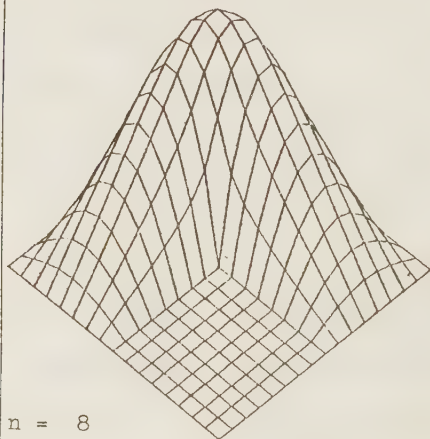
$n = 3$



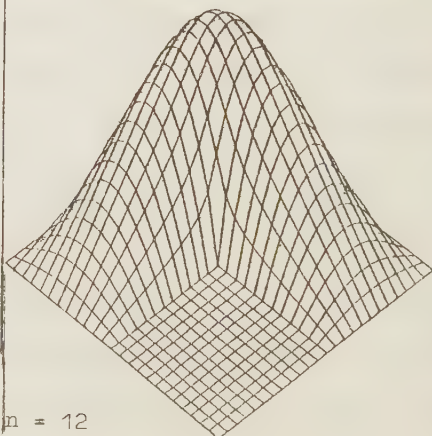
$n = 4$



$n = 6$



$n = 8$



$n = 12$

Das folgende Schema enthält in der ersten Spalte (neben dem Diskretisierungsparameter n) die Näherungswerte für den ersten Eigenwert des L-Gebiets. In den folgenden Spalten stehen die jeweils durch Elimination der Fehlerterme erhaltenen Verbesserungen. Dabei wurde die in Abschnitt 4.8 hergeleitete Entwicklung zugrundegelegt und zusätzlich noch Anteile mit dem Faktor $(\frac{1}{n})^{8/3}$, $(\frac{1}{n})^{10/3}$ berücksichtigt.

2	13.1992					
3	11.2373	8.5018				
4	10.5740	9.1547	9.8136			
6	10.0932	9.4230	9.6888	9.5734		
8	9.9917	9.5385	9.6551	9.6186	9.6485	
12	9.9781	9.5915	9.6440	9.6338	9.6437	9.6416

Man erkennt in dieser Tabelle deutlich die Stabilisierung einzelner Stellen. Im nachfolgenden "Fehlerdiagramm" wurde der unbekannte exakte Eigenwert durch den bei Fox/Henrici/Moler angegebenen Näherungswert $\lambda_1^* = 9.63972$ ersetzt, d.h. es werden die Differenzen aus den obigen Tabellenwerten und λ_1^* gebildet.

2	3.5595					
3	1.5978	-1.1379				
4	0.9342	-0.4850	0.1739			
6	0.4536	-0.2167	0.0491	-0.0663		
8	0.2768	-0.1012	0.0154	-0.0211	0.0088	
12	0.1411	-0.0482	0.0043	-0.0059	0.0040	0.0019

Schätzt man auf die übliche Weise den Konvergenzfaktor mit den Fehlern in den beiden letzten Zeilen, so ergibt sich:

1.66	2.57	3.14	4.42	1.94
------	------	------	------	------

Diese Zahlen suggerieren also eine bessere Konvergenzordnung, als sie tatsächlich vorliegt. Ursache dürfte hier sicherlich die relativ grobe Diskretisierung sein. Man erkennt aber , daß beispielsweise die durch Extrapolation aus den Werten für $n=2,3,4,6$ erhaltene Näherung deutlich besser ist als die für $n=12$. Wir werden später zeigen , daß die benötigten Rechenzeiten für die vier Näherungen zusammen wesentlich geringer sind als die Zeit für $n=12$.

Damit bei der Eigenfunktion ebenfalls durch Extrapolation eine möglichst hohe Fehlerordnung erreicht werden kann , muß eine entsprechende Anzahl von Näherungswerten zu einem festen Punkt vorliegen. Die optimale Zahl erhält man in der Regel für die Punkte , die als Eckpunkte der Triangulierung für kleine Parameter n auftreten. Zu den meisten Punkten gibt es aber oft nur 1 - 3 Näherungswerte , so daß die Extrapolation hier nicht optimal eingesetzt werden kann. Da es außerdem notwendig ist , die Lösungen der diskreten Gleichungen genau zu kennen (sonst liegt keine Fehlerentwicklung mehr vor) hat dies , gerade bei Eigenwertaufgaben , enorme Rechenzeiten zur Folge. Es erscheint uns daher wenig sinnvoll , Extrapolationsmethoden bei Eigenfunktionsentwicklungen anzuwenden , es sei denn man ist an genauen Ergebnissen in einigen wenigen Punkten interessiert. Wir haben daher exemplarisch die Näherungen zum Punkt $(-1/2, 1/2)$ ausgewählt , da hier fünf Werte zur Verfügung stehen. Es zeigt sich hier ein ähnliches Verhalten wie beim Eigenwert. Da sich in der Literatur keine Angaben hierzu finden , haben wir zur Schätzung des Fehlers den letzten extrapolierten Wert gewählt. Aussagen über das tatsächliche Konvergenzverhalten lassen sich damit nicht machen.

Näherungen im Punkt $(-1/2, 1/2)$:

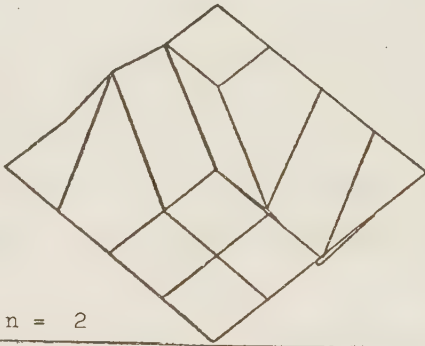
2	0.4290				
4	0.3576	0.3106			
6	0.3457	0.3291	0.3386		
8	0.3415	0.3 24	0.3356	0.3335	
12	0.3382	0.3338	0.3352	0.3347	0.3353

"Fehlerschema"

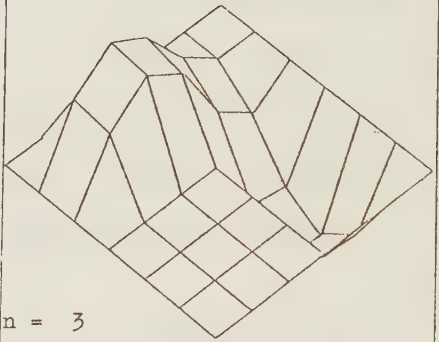
2	0.0937				
4	0.0222	-0.0248			
6	0.0104	-0.0061	0.0033		
8	0.0061	-0.0030	0.0003	-0.0017	
12	0.0030	-0.0015	-0.0001	-0.0005	-----

Als nächstes geben wir nun die Ergebnisse zum zweiten Eigenwert des L-Gebiets an , der , wie bereits erwähnt, der kleinste Wert eines Trapezes ist. Diesen Sachverhalt erkennt man sehr gut in den Zeichnungen der Eigenfunktion , da deren Nullstellen gerade das L-Gebiet in zwei Trapeze zerlegen .

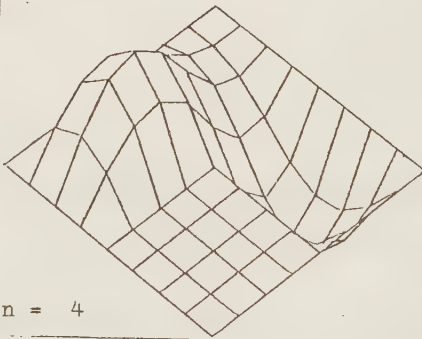
Im Fehlerschema des Eigenwerts wurde als Ersatz für die unbekannte Lösung der bei Fox/Henrici/Moler angegebene Wert $\lambda_2^* = 15.1973$ benutzt. Bei der Eigenfunktion wählten wir wieder die letzte Extrapolierte -0.2894. In beiden Fällen wurde dabei die Entwicklung (4.8.8) vorausgesetzt.



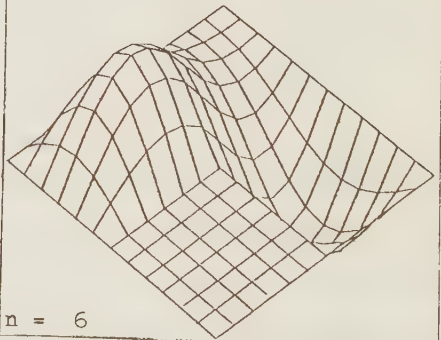
$n = 2$



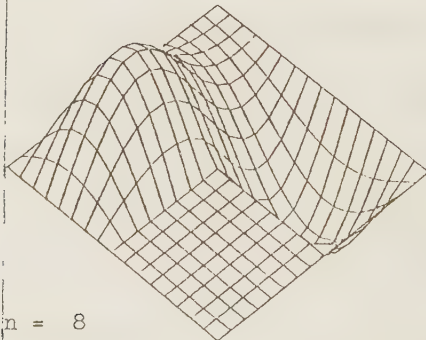
$n = 3$



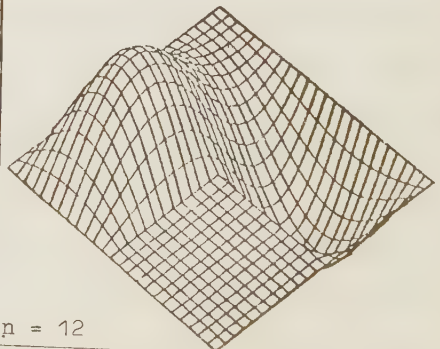
$n = 4$



$n = 6$



$n = 8$



$n = 12$

Eigenwert

2	22.0215					
3	18.3202	15.3591				
4	16.9476	15.1829	15.0647			
6	15.9726	15.1925	15.1987	15.1816		
8	15.6333	15.1971	15.2001	15.2112	15.1876	
12	15.3913	15.1977	15.1982	15.1968	15.1966	15.1981

"Fehler"

2	6.8242					
3	3.1229	0.1618				
4	1.7503	-0.0144	-0.1326			
6	0.7753	-0.0048	0.0014	-0.0157		
8	0.4359	-0.0002	0.0028	0.0139	-0.0097	
12	0.1940	0.0004	0.0009	-0.0004	-0.0007	0.0008

Eigenfunktion im Punkt (1/2,1/2)

2	-0.3955					
4	-0.3158	-0.2892				
6	-0.3009	-0.2890	-0.2889			
8	-0.2958	-0.2893	-0.2895	-0.2891		
12	-0.2922	-0.2894	-0.2894	-0.2894	-0.2894	

"Fehler"

2	-0.1161					
4	-0.0264	0.0002				
6	-0.0115	0.0004	0.0005			
8	-0.0064	0.0001	-0.0001	0.0003		
12	-0.0028	0.0000	0.0000	0.0000	-----	

Man erkennt am Verhalten des "Fehlers" in der ersten Spalte , daß die Folge der Näherungen jeweils quadratisch konvergent ist. Weitere Aussagen über Konvergenzordnungen lassen sich hier nicht machen , da bereits in der zweiten Spalte der Fehler des SGCOR-Verfahrens bemerkbar wird.

Als letztes Beispiel betrachten wir nun den dritten Eigenwert des L-gebiets , der bekanntlich mit dem ersten des Einheitsquadrats übereinstimmt. Dies erkennt man auch in den Abbildungen mit den Näherungen der Eigenfunktionen.

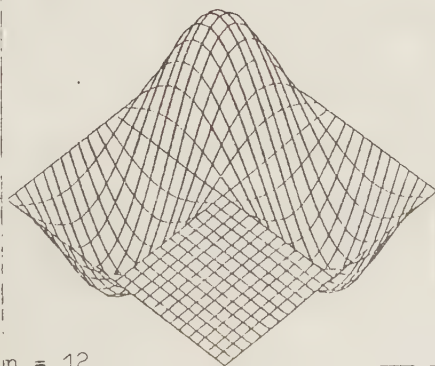
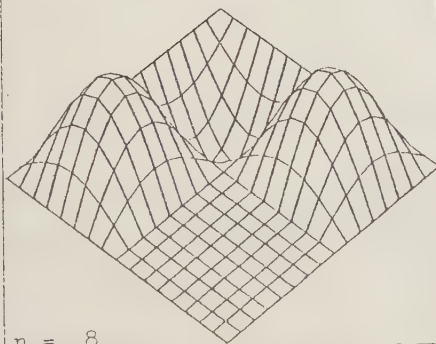
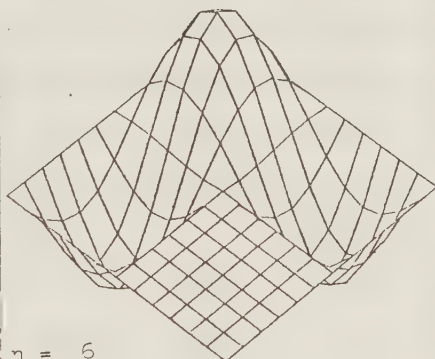
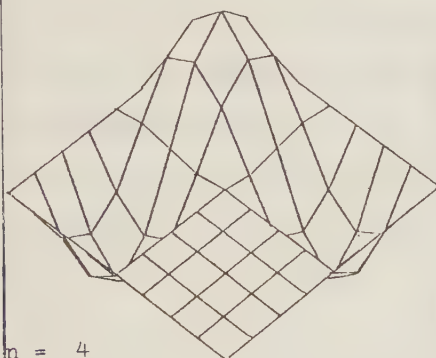
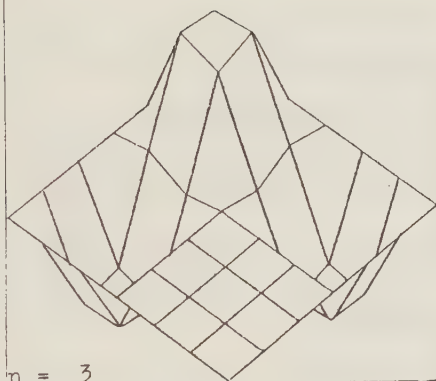
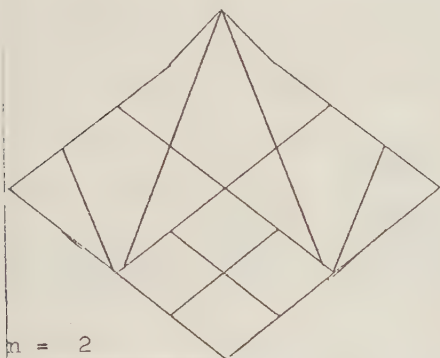
Hier kann nun der globale Diskretisierungsfehler definiert werden , da die exakten Werte des kontinuierlichen Problems bekannt sind :

$$\lambda_3 = 2\pi^2 = 19.739209$$

$$u_3(x,y) = \frac{-2}{\pi\sqrt{3}} \sin\pi x \sin\pi y .$$

Damit sind nach den Ergebnissen von Abschnitt 4.2 quadratische Fehlerentwicklungen zu erwarten. , was dann auch in der folgenden Tabelle klar zu erkennen ist.

Dieses Verhalten ist typisch für alle Eigenwerte , die zu den Gebieten 4.2.2-4 gehören . Wir haben die Entwicklungen in diesen Fällen für die 50 kleinsten Eigenwerte getestet und stets dasselbe Resultat (qualitativ!) erhalten. Daher beschränken wir uns hier exemplarisch auf den Fall des Quadrats (bzw. den dritten Eigenwert des L-gebiets) und geben nun die Extrapolations-schemata für Eigenwert und -funktion im Punkt $(-1/2, 1/2)$ an (exakter Wert $u_3(-1/2, 1/2) = 2/(\pi\sqrt{3})$).



Eigenwert

2 32.000000
3 25.256022 19.860839
4 22.819007 19.685702 19.627324
6 21.098974 19.722948 19.735363 19.748868
8 20.502315 19.735183 19.739262 19.739899 19.739307
12 20.077833 19.738247 19.739269 19.739270 19.739228 19.739225

Fehler

2 12.260791
3 5.516813 0.121630
4 3.079788 -0.053506 -0.111885
6 1.359766 -0.016260 -0.003845 0.009659
8 0.763107 -0.004026 0.000052 0.000690 0.000093
12 0.338625 -0.000961 0.000060 0.000061 0.000019 0.000017

Eigenfunktion im Punkt $(-1/2, 1/2)$

2 0.519798
4 0.411262 0.375083
6 0.387459 0.368416 0.367582
8 0.378880 0.367851 0.367663 0.367668
12 0.372643 0.367653 0.367587 0.367578 0.367576

Fehler

2 0.152245
4 0.043710 0.007531
6 0.019906 0.000863 0.000030
8 0.011327 0.000298 0.000110 0.000115
12 0.005091 0.000101 0.000035 0.000025 0.000023

Wir haben hier in den Ergebnissen mehr Stellen angegeben , um den Einfluß der Ungenauigkeiten des SGCOR-Verfahrens demonstrieren zu können. Man erkennt , daß sie von der Größenordnung 10^{-4} sind , so daß hier keine Verbesserungen durch Extrapolation mehr zu erwarten sind.

Abschließen wollen wir noch einige Angaben zu den benötigten Rechenzeiten machen. Sie beziehen sich alle auf die Rechenanlage TR 440 und geben die Zeit in Sekunden (CPU-Zeit) an . Außerdem beschränken wir uns auf die Eigenwerte , da unserer Meinung nach nur dort die Extrapolation sinnvoll eingesetzt werden kann. Dabei ist das SGCOR-Verfahren für einen Vergleich schlecht geeignet , da dort die meiste Zeit zur Verbesserung der Eigenvektoren benötigt wird.

In der folgenden Tabelle geben wir die Zeiten für das SGCOR-Verfahren an . Außerdem wird die Dimension N_n des Raums der diskreten Ansatzfunktionen aufgeführt :

n	2	3	4	6	8	12
N_n	5	16	33	85	161	261
Zeit	1	12	118	1082	11600	39300

Zu bemerken wäre noch , daß ein Versuch der Berechnung der Eigenwerte und -vektoren für $n = 16$ mit einem aktuellen Residuum von 10^{-4} nach 30 Stunden Rechenzeit abgebrochen wurde.

Damit nun ein realistischer Zeitvergleich durchgeführt werden konnte , wurde das Matrixeigenwertproblem mit Hilfe von Unterprogrammen aus der Bibliothek des Leibnizrechenzentrums gelöst.

Verwendet wurden die Algolprozeduren BREDUC , BRED und TBISEC , mit deren Hilfe das verallgemeinerte Eigenwertproblem zunächst in ein gewöhnliches Problem umgewandelt wird. Die entstehende Matrix wird dann in Tridiagonalform transformiert und anschließend die Eigenwerte mit Bisektion berechnet. Dabei wird stets die Bandstruktur der Matrizen berücksichtigt.

Wir geben nun die Rechenzeiten für dieses Verfahren an :

n	2	3	4	6	8	12	
Zeit	0.28	1.28	3.74	18.77	62.68	215.23	.

Dabei wurden jeweils die fünfzigkleinsten Eigenwerte berechnet (falls $N_n > 50$).

Auch an diesen Rechenzeiten erkennt man die deutlichen Vorteile eines Extrapolationsverfahrens . So ist in allen Beispielen der mit den Werten für $n = 2,3,4,6$ durch Extrapolation berechnete Näherungseigenwert deutlich besser als der für $n=12$. Dabei ist das Rechenzeitverhältnis 24.07 zu 215.23 .

Damit wird deutlich , daß Extrapolationsverfahren effizient eingesetzt werden können , wenn man sich auf die Berechnung der Eigenwerte beschränkt. Bei den Eigenvektoren ist dies wegen der geforderten Genauigkeiten der Näherungen wenig sinnvoll.

Anhang

I Differentiationsformeln

Sei $f_m(x) = x^\alpha (\log x)^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

$$\underline{F1} \quad f_m^{(j)}(x) = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} x^{\alpha-j} (\log x)^\mu f_{m-\mu}^{(j)}(1)$$

Beweis :

$$\begin{aligned} f_m^{(j)}(x) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^j [f_m(tx)] \Big|_{t=1} x^{-j} \\ &= \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \left(\frac{d}{dt} \right)^j [x^\alpha \log x^\mu f_{m-\mu}(t)] \Big|_{t=1} x^{-j} . \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung.

Sei $g_m(x,y) = r^\alpha (\log r)^m \psi(\theta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$,

(r,θ) Polarkoordinaten zu (x,y) und ψ j -mal stetig differenzierbar in (x,y) . Dann gilt für jeden Differentialoperator

$$D_R = r_1 \frac{\partial}{\partial x} + r_2 \frac{\partial}{\partial y} :$$

$$\underline{F2} \quad D_R^j g_m(zx, zy) = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} z^{\alpha-j} (\log z)^\mu D_R^j g_{m-\mu}(x,y) .$$

Diese Formel gilt auch für $f_m(zx)$.

Beweis : wie F1 .

II Konstruktion einer Singularitätenfunktion für Differenzenoperatoren

Es sei $K := \{lX + mY \mid l, m \in \mathbb{Z}\}$ ein Punktgitter in $\mathbb{R}^2$, welches $K_{\alpha, d}$ umfaßt. Zum Differenzenoperator A wie in Abschnitt 4.7 soll eine Singularitätenfunktion $S(P, Q)$, $P, Q \in K$, angegeben werden, d.h. eine Lösung der Gleichung

$$AS(P, Q) = \delta_{P, Q} \text{ für } P, Q \in K.$$

Dazu verallgemeinern wir den Ansatz von Davies [1955].

Sei $v : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v_{lm} := v(P)$ falls $P = lX + mY$.

Es wird eine Lösung von $Av(P) = \delta_{l,0} \delta_{m,0}$ angegeben, d.h. die Singularitätenfunktion zum Punkt 0. $S(P, Q)$ ist dann gegeben durch

$$S(P, Q) = v_{l_1-1, l_2, m_1-m_2} \text{ falls } P = l_1X + m_1Y, Q = l_2X + m_2Y.$$

Der Ansatz $v_{lm} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \eta) e^{i(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta$ führt dann zu

$$\begin{aligned} Av(P) &= X'(X+Y)[2v_{lm} - v_{l, m+1} - v_{l, m-1}] \\ &\quad + Y'(X+Y)[2v_{lm} - v_{l+1, m} - v_{l-1, m}] \\ &\quad - X'Y[2v_{lm} - v_{l+1, m+1} - v_{l-1, m-1}] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \eta) g_A(\xi, \eta) e^{i(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \\ &\stackrel{!}{=} \delta_{l,0} \delta_{m,0} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

mit der durch A induzierten charakteristischen Funktion

$$\begin{aligned} g_A(\xi, \eta) &= X'(X+Y)[2 - e^{i\eta} - e^{-i\eta}] \\ &\quad + Y'(X+Y)[2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}] \\ &\quad - X'Y[2 - e^{i(\xi+\eta)} - e^{-i(\xi+\eta)}]. \end{aligned}$$

Dies führt zu $f_1(\xi, \eta) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 g_A(\xi, \eta)^{-1}$

Da aber f_1 eine nicht integrierbare Singularität bei 0 besitzt, erfüllt der Ansatz (vgl. Davies)

$$v_{lm} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - e^{i(l\varphi + m\eta)}] g_A(\varphi, \eta)^{-1} d\varphi d\eta$$

unsere Forderung.

Mit Hilfe der Singularitätenfunktion können nun spezielle Greensche Funktionen konstruiert werden.

- a) $G_H(P, Q) = G_H(p_1, p_2, q_1, q_2) = v_{l_1-1, l_2, m_1-m_2} - v_{l_1-1, l_2, m_1+m_2}$
für die " obere Halbebene " $m_2 \geq 0$.
Dabei ist $P = l_1 X + m_1 Y$, $Q = l_2 X + m_2 Y$.
 G_H verschwindet auf dem Rand " $m_2 = 0$ " .
- b) $G_Q(P, Q) = G_Q(p_1, p_2, q_1, q_2) = G_H(P, Q) - G_H(p_1, p_2, -q_1, q_2)$
für den " Quadranten " $l_2 \geq 0$, $m_2 \geq 0$.
- c) $G_S(P, Q) = G_S(p_1, p_2, q_1, q_2) = G_Q(P, Q) - G_Q(p_1, p_2, q_2, q_1)$
für den " Sektor " $m_1 \geq 0$, $0 \leq m_2 \leq m_1$.

Andere Darstellungen für die Greenschen Funktionen und die Singularitätenfunktion finden sich beispielsweise bei McCrea/Whipple [1940] oder Stöhr [1950a,b,c] .

Literatur

- ABRAMOWITZ M. , SEGUN I. [1968] : Handbook of mathematical functions. Dover Publications (1968).
- BAKER C.T. , HODGSON G.S. [1971] : Asymptotic expansions for integration formulas in one or more dimensions. Siam J. Numer. Anal. 8 , 473-480 (1971).
- BATEMAN H. [1953] : Higher transcendental functions. McGraw Hill (1953).
- BRAMBLE J.H. , HUBBARD B.E. [1968] : Effects of boundary regularity on the discretisation error in the fixed membrane eigenvalue problem. Siam J. Numer. Anal. 5 , 835-863 (1968).
- BRAMBLE J.H. , HUBBARD B.E. , ZLAMAL M. [1968] : Discrete analogues of the Dirichlet problem with isolated singularities. Siam j. Numer. Anal. 5 , 1-25 (1968).
- BULIRSCH R. [1966] : Über asymptotische Entwicklungen bei diskreten Eigenwertproblemen. Habilitationsschrift , Technische Universität München (1966).
- DAVIES H. [1955] : Poisson's partial difference equation. Quart. J. Math. Oxford 6 , 232-240 (1955).
- DONELLY J.D.P. [1969] : Eigenvalues of membranes with reentrant corners. Siam J. Numer. Anal. 6 , 47-61 (1969).
- FIX G.J. [1969] : Higher order Rayleigh-Ritz approximations. J. Math. Mech. 18 , 645-657 (1969).
- FIX G.J. , GULATI S. , WAKOFF G.I. [1973] : On the use of singular functions with finite element approximations. J. Comp. Phys. 13 , 209-228 (1973).
- FORSYTHE G. [1954] : Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes. Pacific J. Math. 4 , 467-480 (1954).
- FORSYTHE G. , WASOW W. [1960] : Finite-difference methods for partial difference equations. Wiley (1960).

- FOX L. , HENRICI P. , MOLER C. [1967] : Approximation and bounds for eigenvalues of elliptic operators.
Siam J. Numer. Anal. 4 , 89-102 (1967).
- FRIED I. [1972] : The l_2 and l_∞ condition numbers of the finite element stiffness and mass matrices , and the pointwise convergence of the method. In "The mathematics of finite elements and applications." , Academic Press (1972).
- GRIGORIEFF R.D. [1975a] : Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. I. Qualitative Konvergenz.
Numer. Math. 24 , 355-374 (1975)
- [1975b] : Konvergenzordnung.
Numer. Math. 24 , 415-433 (1975).
- [1975c] : Asymptotische Entwicklungen.
Numer. Math. 25 , 79-97 (1975).
- HAVIE T. [1979] : General Neville type extrapolation schemes.
BIT 19 , 204-213 (1979).
- HELLINGER E. , TOEPLITZ O. [1928] : Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Teubner (1928).
- HOFMANN P. [1967] : Asymptotic expansions of the discretization error of boundary value problems in rectangular domains.
Numer. Math. 9 , 302-322 (1967).
- JOYCE D.C. [1971] : Survey of extrapolation processes in numerical analysis. Siam Review 13 , 435-488 (1971).
- KRYLOV V. [1962] : Approximate calculation of integrals.
MacMillan Company (1962).
- LAURENT P. [1964] : Formules de quadrature approchée sur domaines rectangulaires convergentes pour toute fonction intégrable Riemann. C.R. Acad. Sc. Paris 258 , 798-801 (1964)
- LEHMANN R.S. [1959] : Developments at an analytic corner of solutions of elliptic partial differential equations.
J. Math. Mech. 8 , 727-760 (1959).

- LYNESS J.N. [1976a] : Application of extrapolation techniques to multidimensional quadrature of some integrand functions with a singularity. J. Comp. Phys. 20 , 346-364 (1976).
- [1976b] : An error functional expansion for N-dimensional quadrature with an integral function singular at a point. Math. Comp. 30 , 1-23 (1976).
- LYNESS J.N. , MONEGATO G. [1980] : Quadrature error functional expansions for the simplex when the integrand function has singularities at vertices. Math. Comp. 34 , 213-225 (1980).
- LYNESS J.N. , NINHAM B.W. [1967] : Numerical quadrature and asymptotic expansions. Math. Comp. 21 , 162-178 (1967).
- LYNESS J.N. , McH GH B.J.J. [1970] : On the remainder in the N-dimensional Euler MacLaurin expansion. Numer. Math. 15 , 333-344 (1970).
- LYNESS J.N. , PURI K.K. [1973] : The Euler-MacLaurin expansion for the simplex. Math. Comp. 27 , 273-293 (1973).
- MAKAI E. [1970] : Complete orthogonal systems of eigenfunctions of three triangular membranes. Stud. Sci. Math. Hung. 5 , 51-62 (1970).
- McCREA W.H. , WHIPPLE F.J.W. [1940] : Random paths in two and three dimensions. Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A 60 , 281-298 (1940).
- MONEGATO G. , LYNESS J.N. [1979] : On the numerical evaluation of a particular singular two-dimensional integral. Math. Comp. 33 , 993-1002 (1979).
- NAVOT I. [1961] : An extension of the Euler-MacLaurin summation formula to functions with a branch singularity. J. Math. Phys. 40 , 271-276 (1961).
- [1962] : A further extension of the Euler-MacLaurin summation formula. J. Math. Phys. 41 , 155-163 (1962).
- NINHAM B.W. [1966] : Generalized functions and divergent integrals. Numer. Math. 8 , 444-457 (1966).

OLVER F.W.J. [1974] : Asymptotics and special functions.
Academic Press (1974).

SCHATZ A.H. , WAHLBIN L.B. [197] : Interior maximum norm
estimates for finite element methods.
Math. Comp. 31 , 414-442 (1977).

——— [1978] : Maximum norm estimates in the finite element
method on plane polygonal domains. Part 1
Math. Comp. 32 , 73-109 (1978).

SCHWARZ H.R. [1976] : Praktische Erfahrungen mit Varianten der
Koordinatenüberrelaxation zur Lösung von Eigenwertaufgaben.
ISNM 31 , Birkhäuser Verlag , 199-222 (1976).

——— [1977] : Two algorithms for treating $Ax = \lambda Bx$.
Computer Meth. Appl. Mech. Eng. 12 , 181-199 (1977).

——— [1980] : Methode der finiten Elemente. Teubner (1980).

STETTER H.J. [1965] : Asymptotic expansions for the error of
discretization algorithms for non-linear functional
equations . Numer. Math. 7 , 18-31 (1965).

——— [1973] : Analysis of discretization methods for ordinary
differential equations. Springer Verlag (1973).

STÖHR A. [1950a] : Über einige lineare partielle Differenzen-
gleichungen mit konstanten Koeffizienten.
I. Allgemeiner Teil . Math. Nach. 3 , 208-242 (19

——— [1950b] : II. Erstes Beispiel . Math. Nach. 3 , 295-315 (1950)

——— [1950c] : III. Zweites Beispiel. Math. Nach. 3 , 330-357 (1950)

STRANG G. , FIX G. [1973] : An analysis of the finite element
method. Prentice Hall (1973).

STUMMEL F. [1977] : Approximation methods for eigenvalue problems
in elliptic differential equations.
ISNM 38 , Birkhäuser Verlag , 133-165 (1977).

VAINIKKO G. [1977] : Über die Konvergenz und Divergenz von Nähe-
rungsmethoden bei Eigenwertproblemen.
Math. Nach. 78 , 145-164 (1977).

- VEIDINGER L. [1977] : On the order of convergence of finite element approximations to eigenvalues and eigenfunctions. Per. Math. Hung. 8 , 45-52 (1977).
- WATERMAN P.C. , YOS J.M. , ABODEELY R.J. [1969] : Numerical integration of non-analytic functions. J. Math. Phys. 43 , 45-50 (1969).
- WATSON G.N. [1966] : A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press (1966).
- WLOKA J. [1971] : Funktionalanalysis und Anwendungen. Walter de Gruyter Verlag (1971).

Lebenslauf

Norbert Spangler	geboren am 18. 4.1950 in Blomenhof Kreis Neumarkt i. d. Opf. als erstes von drei Kindern der Eheleute Johann und Margarete Spangler ; seit Dezember 1978 verheiratet mit Stephanie Spangler , geb. Mees .
Schulbildung	1956-1960 Volksschule in der Bräugasse in Neumarkt i. d. Opf. 1960-1969 Willibald Gluck Gymnasium in Neumarkt i. d. Opf. 1969 Reifeprüfung
Studium	1969-1975 Studium der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität in München 1975 (Mai) Diplomhauptprüfung im Fach Mathematik
Tätigkeit	1975 (Mai-Dez.) wiss. Hilfskraft 1976-1978 Stipendium durch das Cusanuswerk 1978-1980 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München .

